International Standard
Norme internationale

ISO 3534/3

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION•МЕЖДУНАРОДНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПО СТАНДАРТИЗАЦИИ•ORGANISATION INTERNATIONALE DE NORMALISATION

Statistics — Vocabulary and symbols — Part 3: Design of experiments

First edition — 1985-11-15

Statistique — Vocabulaire et symboles — Partie 3: Plans d'expérience

Première édition — 1985-11-15

UDC/CDU 001.001.5 : 001.4 **Ref. No./Réf. nº : ISO 3534/3-1985 (E/F)**

Descriptors : statistics, experimental design, vocabulary./**Descripteurs :** statistique, plan d'expérimentation, vocabulaire.

Price based on 33 pages/Prix basé sur 33 pages

ISO 3534/3-1985 (E/F)

Foreword

ISO (the International Organization for Standardization) is a worldwide federation of national standards bodies (ISO member bodies). The work of preparing International Standards is normally carried out through ISO technical committees. Each member body interested in a subject for which a technical committee has been established has the right to be represented on that committee. International organizations, governmental and non-governmental, in liaison with ISO, also take part in the work.

Draft International Standards adopted by the technical committees are circulated to the member bodies for approval before their acceptance as International Standards by the ISO Council. They are approved in accordance with ISO procedures requiring at least 75 % approval by the member bodies voting.

International Standard ISO 3534/3 was prepared by Technical Committee ISO/TC 69, *Applications of statistical methods*. ISO 3534/3 together with ISO 3534/1 and ISO 3534/2 constitute a revision of, and will eventually replace, ISO 3534-1977.

Two definitions from ISO 3534-1977, *randomization* and *replication*, have been incorporated in ISO 3534/3, the remaining definitions in ISO 3534/3 are new.

NOTE — ISO 3534/3 was originally circulated as ISO/DIS 7584.

Avant-propos

L'ISO (Organisation internationale de normalisation) est une fédération mondiale d'organismes nationaux de normalisation (comités membres de l'ISO). L'élaboration des Normes internationales est confiée aux comités techniques de l'ISO. Chaque comité membre intéressé par une étude a le droit de faire partie du comité technique créé à cet effet. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'ISO participent également aux travaux.

Les projets de Normes internationales adoptés par les comités techniques sont soumis aux comités membres pour approbation, avant leur acceptation comme Normes internationales par le Conseil de l'ISO. Les Normes internationales sont approuvées conformément aux procédures de l'ISO qui requièrent l'approbation de 75 % au moins des comités membres votants.

La Norme internationale ISO 3534/3 a été élaborée par le comité technique ISO/TC 69, *Application des méthodes statistiques*. L'ISO 3534/3 constitue avec l'ISO 3534/1 et l'ISO 3534/2 une révision de l'ISO 3534-1977 et par la suite remplacera cette dernière.

Deux termes définis dans l'ISO 3534-1977, à savoir *randomisation* et *réplique*, ont été incorporés dans l'ISO 3534/3, tous les autres termes et leurs définitions étant nouveaux.

NOTE — L'ISO 3534/3 à été soumise à l'origine en tant qu'ISO/DIS 7584.

Background information on the design of experiments

Design of experiments is essentially a strategy for experimentation that accounts for environmental conditions surrounding the experiments and for arranging the experiments so as to provide the answer to the questions of interest in an efficient, clear manner. Variability exists, and it must be taken into consideration. Studies of some factors under conditions of isolation where all other factors are held "constant" or at some "ideal" level, usually are not representative of what happens to that factor in the "real" world where there is simultaneous variation of many things.

Experimentation may take place in a laboratory where there is a high degree of freedom to change the levels of the factors of interest because the test specimens are not to be used after the experiment is over. In other cases, experimentation takes place in an existing process where there is a restriction to relatively small changes per step because the unit being studied (a person or a product) must be able to behave in a normal fashion following the experiment. The experiments may be run on "laboratory model" equipment requiring further work to relate to "production" status or they may be run in routine type environments.

While "design of experiments" (see clause 2) is independent in a sense from the analysis and interpretation of the data collected, frequently used analysis methods should be considered because they help in the understanding of design differences. The combination of design and methods of analysis (see clause 3) reflects how the design is effective.

In planning an experiment, it is necessary to limit biases introduced by the environment. For example, if those parts of the experiment using low dosage of a drug were conducted in the morning and those with high dosage in the afternoon, would the environmental factor of time of day be confounded with the levels of dosage? Topics such as "randomization" (see 1.12) and "blocking" deal with issues of how to minimize the unwanted effects of these "noise" elements that are usually so numerous they could not be eliminated even if it were economical or realistic to do so. Arrangements into "blocks" (see 2.1.2), "incomplete blocks" (see 2.1.5), "Latin squares" (see 2.1.3) and "split-plots" (see 2.1.7) provide mechanisms that let the experimenter consider beforehand how to reduce the effects of unwanted variability and how to get more meaningful answers.

The area of "factorial experimentation" (see 2.2) deals with the interrelationships between multiple factors of interest to the experimenter. One-factor-at-a-time studies may be useful in some instances to gain insight into that factor, but they can also be misleading if that factor behaves differently in the presence, absence or at other levels of other factors. Frequently the "breakthrough" that permits a step forward comes from the synergism revealed in a study of "interactions" (see 1.14), or a failure may stem from unknown interaction effects.

Information de base concernant les plans d'expérience

Les plans d'expérience constituent essentiellement une stratégie pour l'expérimentation qui, prenant en compte d'une part les conditions d'environnement des expériences et d'autre part la combinaison de ces expériences, permet de fournir des réponses à des questions importantes, de manière efficace et claire. La variabilité étant une réalité, il est nécessaire de la prendre en considération. Les études de certains facteurs qu'on isole en maintenant tous les autres facteurs «constants» ou à une variante «idéale» ne sont généralement pas représentatives de ce qui se produit sur ce facteur en milieu «réel» où il existe une variation simultanée de plusieurs choses.

L'expérimentation peut se dérouler dans un laboratoire où les changements des variantes des facteurs se font avec un grand degré de liberté car les échantillons n'ont plus à être utilisés lorsque l'expérience est terminée. Dans d'autres cas, l'expérimentation concerne un procédé existant pour lequel les changements des variantes sont limités à des modifications relativement petites réalisées par seuil, car durant l'expérience l'unité étudiée (une personne ou un produit) doit se comporter de manière normale. Les expériences peuvent aussi être effectuées soit dans un «laboratoire pilote», ce qui exige un travail supplémentaire pour les relier aux conditions de production, soit dans des environnements de routine.

Alors que les «plans d'expérience» (voir chapître 2) sont en un sens, indépendants de l'analyse et de l'interprétation des résultats obtenus, les méthodes d'analyse fréquemment utilisées devraient être prises en compte car elles aident à comprendre les différences entre plans d'expérience. La combinaison des plans d'expérience et des méthodes d'analyse (voir chapitre 3) reflète l'efficacité de ces plans.

Il est nécessaire, en planifiant une expérience, de limiter les biais introduits par l'environnement. Par exemple, si certaines parties d'une expérience utilisant le dosage simplifié d'un médicament se déroulaient le matin et d'autres parties utilisant un dosage complet en fin d'après-midi, le facteur période de la journée pourrait-il être confondu avec les variantes du dosage? Des sujets tels que la «randomisation» (voir 1.12) et la «mise en bloc» donnent une réponse sur la façon de minimiser les effets indésirables de ces éléments «perturbateurs» qui généralement sont si nombreux qu'ils ne peuvent être éliminés même s'il était économique ou réaliste de le faire. Les arrangements en «blocs» (voir 2.1.2), en «blocs incomplets» (voir 2.1.5), en «carrés latins» (voir 2.1.3) et en «parcelles subdivisées» (voir 2.1.7) donnent les mécanismes qui permettent à l'expérimentateur de considérer d'avance la façon de réduire les effets de variabilité indésirable et d'obtenir des réponses plus significatives.

Le domaine des «expériences factorielles» (voir 2.2) traite des relations entre facteurs multiples importants pour l'expérimentateur. À un moment donné des études, un facteur peut être utile dans certains exemples qui rendent crédible ce facteur, mais qui peuvent aussi tromper si ce facteur se comporte différemment en la présence, en l'absence ou à d'autres niveaux des autres facteurs. Fréquemment le «déclic» qui permet d'avancer provient de la synergie mise en évidence lors d'une étude des «interactions» (voir 1.14) ou alors il se peut qu'un échec résulte de la méconnaissance de l'effet d'«interaction».

Factorial experiments may be at two versions or levels of each factor, which limits interpretation to linear relationships but may be sufficient for "screening" to determine if there is any apparent interest in the factor. They may also include three or more levels or versions to allow for estimation of "curvilinear" effects. The size of the experiment is an obvious consideration in experiment efficiency, and "fractional replication" (see 2.2.7), a means of selecting specific portions of a complete factorial experiment, is of immense value. For finding out which, if any, of the factors shows greatest promise of a real change, "screening" experiments using small fractional replications can be very effective. For work near the optimum points, curvature effects may be studied by the creation of "composite" designs (see 2.2.10) adding supplementary points to the two-level factorial.

Experimentation is generally carried out to find factors of potential interest or to optimize some effects. For optimization, the data from the experiment is frequently used to create an "assumed model" (see 1.20) of how the factors relate to selected levels. A "response surface" (see 1.22) serves as a map of these models and may be useful in prediction and location of the next phase of experiments.

Good experiment design should:

a) furnish required information with minimum effort;

b) lead to pre-experiment determination of whether the questions of interest can be clearly answered in the experiment;

c) reflect whether an experiment series or a one-shot experiment is desirable;

d) show the pattern and arrangement of experiment points to avoid misunderstandings in carrying out the experiment;

e) encourage the use of prior knowledge and experience in describing assumptions and selection of factors and levels.

NOTE — The examples accompanying the definitions of certain terms are generally intended to illustrate simple applications of those definitions. However, the examples given for *regression analysis* (3.3) and *contrast analysis* (3.5) require special comment. These examples are not detailed enough for those unfamiliar with these topics, nor complete enough for those with considerable experience. The purpose of their inclusion is to provide the experienced person with a reference to illustrate the concepts to less experienced practitioners.

L'expérimentation factorielle peut être à deux variantes ou niveaux pour chaque facteur, ce qui limite l'interprétation à des relations linéaires mais peut être suffisant pour le «balayage» qui détermine si un facteur a un quelconque intérêt apparent. Cette expérimentation peut également comporter trois variantes ou niveaux, ou plus, de façon à permettre l'estimation des effets de «courbure». La dimension de l'expérience est pour l'efficacité de celle-ci une considération importante, et la «réplique fractionnée» (voir 2.2.7), moyen de sélectionner des parties spécifiques de l'expérience factorielle complète, est d'un immense intérêt. Pour découvrir lequel des facteurs, ou si tout facteur, se promet d'être réellement influent, des expériences avec «balayage» utilisant de petites répliques fractionnées peuvent être efficaces. Pour un travail proche des points optima, les effets de courbure peuvent être étudiés en formant des «plans composites» (voir 2.2.10) qui ajoutent des points supplémentaires au plan factoriel à deux niveaux.

L'expérimentation est généralement menée pour trouver les facteurs potentiellement intéressants ou pour optimiser certains effets. Pour une optimisation, l'information à partir de l'expérience est fréquemment utilisée pour créer un «modèle théorique» (voir 1.20) qui présente la nature des relations entre les facteurs et les niveaux choisis. Une «surface de réponse» (voir 1.22) sert de représentation à ces modèles et peut être utile dans la prévision et la définition de la phase d'expérience suivante.

Un bon plan d'expérience devrait:

a) fournir l'information nécessaire avec un effort minimal;

b) conduire avant l'expérience à la détermination qui permet de savoir si l'expérience pourra clairement répondre aux questions intéressantes;

c) indiquer si, soit une série d'expériences, soit une expérience ponctuelle est souhaitable;

d) mettre en évidence le modèle et l'arrangement des points de l'expérience pour éviter des incompréhensions lors de la réalisation de l'expérience;

e) encourager l'utilisation de la connaissance fondamentale et de l'expérience en décrivant les hypothèses et la sélection des facteurs et niveaux.

NOTE — Les exemples accompagnant les définitions de certains termes sont généralement destinés à illustrer des applications simples de ces définitions. Cependant, les exemples donnés en 3.3 *analyse de régression* et 3.5 *analyse de contrastes* nécessitent un commentaire particulier. Ces exemples ne sont ni suffisamment détaillés pour ceux qui ne sont pas familiers de ces sujets, ni suffisamment complets pour ceux qui ont une expérience considérable. L'objet de leur insertion est de donner en référence aux praticiens moins expérimentés une illustration des concepts qui résulte de l'expérience des spécialistes.

Contents

Sommaire

This page intentionally left blank

Statistics — Vocabulary and symbols — Part 3: Design of experiments

Introduction

This International Standard is divided into three parts:

- Part 1: Probability and general statistical terms.[1]
- Part 2: Statistical quality control.[1]
- Part 3: Design of experiments.

The entries in this part of ISO 3534 are arranged analytically and alphabetical indexes in French and English are provided.

Scope and field of application

This part of ISO 3534 defines the terms used in the field of design of experiments.

1 General terms

1.1 design of experiments; experiment design: The arrangement in which an experimental programme is to be conducted, and the selection of the levels (versions) of one or more factors or factor combinations to be included in the experiment.

NOTE — The purpose of designing an experiment is to provide the most efficient and economical methods of reaching valid and relevant conclusions from the experiment. The selection of an appropriate design for any experiment is a function of many considerations such as the type of questions to be answered, the degree of generality to be attached to the conclusions, the magnitude of the effect for which a high probability of detection (power) is desired, the homogeneity of the experimental units and the cost of performing the experiment. A properly designed experiment will permit relatively simple statistical interpretation of the results, which may not be possible otherwise. The "arrangement" includes the randomization procedure for allocating treatments to experimental units.

The term "experimental design" is also frequently used. See *factor* (1.2), *level* or *version* (of a factor) (1.3), *treatment* (1.4) and *experimental unit* (1.6).

1) At present at the stage of draft.

Statistique — Vocabulaire et symboles — Partie 3: Plans d'expérience

Introduction

La présente Norme internationale comprend trois parties:

- Partie 1: Probabilité et termes statistiques généraux.[1]
- Partie 2: Contrôle statistique de qualité.[1]
- Partie 3: Plans d'expérience.

La disposition des termes dans la présente partie de l'ISO 3534 est faite de façon analytique et des index alphabétiques français et anglais sont donnés.

Objet et domaine d'application

La présente partie de l'ISO 3534 définit des termes utilisés dans le domaine des plans d'expérience.

1 Termes généraux

1.1 plan d'expérience; plan expérimental: Ensemble des modalités selon lesquelles un programme expérimental doit être réalisé et choix des variantes (niveaux) d'un ou de plusieurs facteurs, ou des combinaisons de facteurs, à introduire dans l'expérience.

NOTE — L'objet de la planification d'une expérience est de fournir les méthodes les plus efficaces et les plus économiques permettant, à partir de cette expérience, d'obtenir des conclusions solides et adéquates. Dans une expérience particulière, le choix du plan approprié dépend de nombreuses considérations telles que la nature des questions auxquelles on désire répondre, le degré de généralité recherché pour les conclusions, l'importance des effets pour lesquels une probabilité élevée de détection est souhaitée, l'homogénéité des unités expérimentales et le coût d'exécution de l'expérience. Une expérience convenablement organisée permettra une interprétation statistique relativement simple des résultats, qui peut ne pas être possible d'une autre façon. L'« ensemble des modalités » inclut la procédure de randomisation pour l'attribution des traitements aux unités expérimentales.

L'expression « plan expérimental » est aussi fréquemment utilisée. Voir 1.2 *facteur*, 1.3 *variante* ou *niveau* (d'un facteur), 1.4 *traitement*, 1,6 *unité expérimentale*.

1) Actuellement au stade de projet.

1.2 factor: An assignable cause which may affect the responses (test results) and of which different levels (versions) are included in the experiment.

NOTE — Factors may be quantitative, such as temperature, speed of execution and voltage applied, or they may be qualitative, such as the variety of a material, presence or absence of a catalyst, and the type of equipment.

Those factors which are to be studied in the experiment are sometimes called "principal factors". See *level* or *version* (1.3), *experiment space* (1.5) and *block factors* (1.9).

1.3 level; version (of a factor): A given value, a specification of procedure or a specific setting of a factor.

Example

Two versions of a catalyst may be presence and absence. Four levels of a heat treatment may be 100 °C, 120 °C, 140 °C and 160 °C.

NOTE — "Version" is a general term applied both to quantitative and qualitative factors. The more restrictive term "level" is frequently used to express more precisely the quantitative characteristic.

Responses observed at the various levels (versions) of a factor provide information for determining the effect of the factor within the range of levels of the experiment. Extrapolation beyond the range of these levels is usually inappropriate without a firm basis for assuming model relationships. Interpolation within the range may depend on the number of levels and the spacing of these levels. It is usually reasonable to interpolate, although it is possible to have discontinuous or multimodal relationships that cause abrupt changes within the range of the experiment. The levels (versions) may be limited to certain selected fixed values (whether these values are or are not known) or they may represent purely random selection over the range to be studied. The method of analysis is dependent on this selection. See *model 1 analysis of variance (fixed model)* (3.2.1), *model 2 analysis of variance (random model)* (3.2.2) and *mixed model analysis of variance* (3.2.3).

1.4 treatment: A combination of the levels (versions) of each of the factors assigned to an experimental unit (see 1.6).

1.5 experiment space: The materials, equipment, environmental conditions and so forth which are available for conducting an experiment.

NOTE — That portion of the experiment space restricted to the range of levels (versions) of the factors to be studied in the experiment is sometimes called the "factor space". Some elements of the experiment space may be identified with *blocks* (1.8) and be considered as *block factors* (1.9).

1.6 experimental unit: A portion of the experiment space to which a treatment is applied or assigned in the experiment.

1.2 facteur: Cause assignable susceptible d'affecter les réponses (résultats d'essai) et dont différentes variantes (niveaux) sont incluses dans l'expérience.

NOTE — Les facteurs peuvent être quantitatifs — par exemple la température, la vitesse d'exécution, le voltage — ou qualitatifs — par exemple la variété d'un matériau, la présence ou l'absence d'un catalyseur, le type d'équipement.

Les facteurs qui doivent être étudiés dans l'expérience sont parfois appelés «facteurs principaux». Voir 1.3 *variante* ou *niveau* (d'un facteur), 1.5 *espace expérimental*, 1.9 *facteurs blocs*.

1.3 variante; niveau (d'un facteur): Valeur donnée, spécification d'une procédure ou de la mise en œuvre d'un facteur.

Exemple

Deux variantes d'un catalyseur peuvent être la présence ou l'absence de catalyseur. Quatre niveaux d'un traitement thermique peuvent être 100 °C, 120 °C, 140 °C et 160 °C.

NOTE — «Variante» est un terme général s'appliquant à la fois aux facteurs quantitatifs et qualitatifs. Le terme «niveau», plus restrictif, est fréquemment utilisé lorsqu'il s'agit d'exprimer de façon plus précise un caractère quantitatif.

Les réponses obtenues aux différentes variantes ou aux différents niveaux d'un facteur fournissent une information sur l'effet du facteur à l'intérieur du domaine des niveaux inclus dans l'expérience. Une extrapolation hors de ce domaine est généralement inadéquate à moins que l'on ait de solides raisons d'admettre l'existence d'un modèle de relation fonctionnelle. L'interpolation à l'intérieur du domaine peut dépendre du nombre de niveaux et de leur échelonnement; elle est généralement raisonnable, bien qu'il puisse exister des relations discontinues ou multimodales entraînant des changements brusques à l'intérieur même du domaine étudié. Les variantes ou niveaux peuvent, soit être limités à certaines valeurs délibérément choisies (que celles-ci soient ou non connues), soit résulter d'une sélection purement aléatoire à l'intérieur du domaine à étudier. La méthode d'analyse dépend de l'option choisie. Voir 3.2.1 *analyse de variance de modèle 1 (modèle à effets fixes)*, 3.2.2 *analyse de variance de modèle 2 (modèle aléatoire)*, 3.2.3 *modèle mixte d'analyse de variance*.

1.4 traitement: Combinaison des variantes (niveaux) de chacun des facteurs affectée à une unité expérimentale (voir 1.6).

1.5 espace expérimental: Matériaux, équipements, conditions d'environnement et autres, intervenant dans la conduite d'une expérience.

NOTE — La partie de l'espace expérimental limitée au domaine des variantes (niveaux) des facteurs étudiés dans l'expérience est parfois appelée «espace des facteurs». Certains éléments de l'espace expérimental peuvent être identifiés comme étant des *blocs* (voir 1.8) et considérés comme des *facteurs blocs* (voir 1.9).

1.6 unité expérimentale: Partie de l'espace expérimental à laquelle un traitement est appliqué ou affecté dans l'expérience.

Example

The unit may be a patient in a hospital, a group of animals, a production batch, a section of a compartmented tray, etc.

1.7 experimental error: The variation in the responses (test results) caused by extraneous variables, other than those due to factors and blocks, the effect of which adds a degree of uncertainty to the observed response value.

NOTE — It is a common characteristic of experiments that, when they are repeated, their results vary from trial to trial, even though the experimental materials, environmental conditions and the experimental operations are carefully controlled. Therefore, the occurrence of experimental error is inevitable in practical experimentation. This variation introduces a degree of uncertainty into conclusions that are drawn from the results, and therefore has to be taken into account in reaching conclusions. See *residual error* (1.21). Experimental error is usually measured in an experiment as a pooled variance of sets of duplicate observations.

1.8 block: A subdivision of the experiment space into groups, each consisting of relatively homogeneous units such that, within each group, the experimental error can be expected to be smaller than would be expected should a similar number of units be randomly located within the entire experiment space.

NOTE — Blocks are usually selected to allow for assignable causes, in addition to those introduced as factors to be studied (principal factors), which it may be difficult, or even impossible, to keep constant for all of the experimental units in the complete experiment. The effect of these assignable causes may be minimized within blocks, thus a more homogeneous experiment sub-space is obtained. The analysis of the experiment results has to account for the effect of blocking the experiment.

Blocks which accommodate a complete set of treatment combinations are called "complete blocks". Those which accommodate only a portion of the complete set are called "incomplete blocks". When two treatments are dealt with in pairs, these pairs are blocks.

Example

The term "block" originated in agricultural experiments in which a field was subdivided into sections having common conditions, such as exposure to the wind, proximity to underground water or thickness of the arable layer. In other situations, blocks are based on batches of raw material, operators, the number of units studied in a day, etc.

1.9 block factors: Those assignable causes which serve as a basis for subdividing the experiment space into blocks.

NOTE — Generally the versions of the block factors are imposed by the available experimental conditions, but sometimes they are selected in order to broaden the interpretation of the results by including a wider range of conditions. It is usually assumed that the block factors do not interact with the principal factors. When the versions are relatively close, this hypothesis is often a reasonable assumption. However, if the versions differ considerably or if there is no *a priori* basis for the assumption, the assumption should be verified so that an appropriate method of analysis will be chosen for the experiment data.

Exemple

L'unité expérimentale peut être: un malade dans un hôpital, un groupe d'animaux, un lot d'une production, une partie d'un plateau compartimenté, etc.

1.7 erreur expérimentale: Variation dans les réponses (résultats d'essai) due à des variables non contrôlées, s'ajoutant à celle qui est imputable aux facteurs et aux blocs, et dont l'effet est d'ajouter une incertitude suplémentaire aux valeurs des réponses observées.

NOTE — La non-constance des résultats est une caractéristique commune à toutes les expériences, lorsque celles-ci sont répétées même si les matériaux expérimentaux, les conditions d'environnement et les opérations expérimentales sont soigneusement contrôlés. En conséquence, l'existence d'une erreur expérimentale est inévitable en expérimentation pratique. Cette erreur, qui introduit un degré d'incertitude dans les conclusions tirées des résultats, devrait donc être prise en considération lorsqu'on énonce les conclusions. Voir 1.21 *erreur résiduelle*. L'erreur expérimentale est généralement mesurée, dans une expérience, par la variance commune à des séries d'observations réitérées.

1.8 bloc: Subdivision de l'espace expérimental en groupes, chaque groupe étant constitué d'unités relativement homogènes et dans lequel on peut s'attendre à ce que l'erreur expérimentale soit moindre que pour un même nombre d'unités aléatoirement situées à l'intérieur de la totalité de l'espace expérimental.

NOTE — Les blocs sont généralement choisis pour tenir compte, en addition aux causes assignables définies par les facteurs étudiés (facteurs principaux) d'autres causes assignables qu'il peut être difficile, ou même impossible, de maintenir constantes sur la totalité des unités expérimentales de l'expérience complète. L'effet de ces causes assignables peut être minimisé à l'intérieur des blocs, des sous-espaces expérimentaux plus homogènes étant ainsi obtenus. L'analyse des résultats expérimentaux devrait tenir compte de l'effet entraîné par la constitution de blocs.

Les blocs qui contiennent l'ensemble complet des combinaisons de traitement sont appelés «blocs complets»; ceux qui n'en contiennent qu'une partie sont appelés «blocs incomplets». Quand deux traitements sont étudiés en paires, ces parties constituent des blocs.

Exemple

L'origine du terme «bloc» provient des expériences agronomiques dans lesquelles un champ est subdivisé en sections présentant des conditions communes telles que: exposition au vent, proximité de source souterraine ou épaisseur de la couche de terre arable. Dans d'autres situations, les blocs sont constitués par des lots de matières premières, des opérateurs, le nombre d'unités étudiées dans une même journée, etc.

1.9 facteurs blocs: Causes assignables servant de base à la subdivision de l'espace expérimental en blocs.

NOTE — En général les variantes des facteurs blocs sont imposées par les conditions expérimentales disponibles; parfois cependant elles sont choisies de façon à élargir l'interprétation des résultats par la prise en considération de conditions plus étendues. On admet généralement que les facteurs blocs n'ont pas d'interaction avec les facteurs principaux. Lorsque les variantes sont relativement voisines, cette hypothèse est généralement raisonnable; cependant, si elles diffèrent de façon importante, ou s'il n'y a aucune base a *priori* pour justifier cette hypothèse, il importe de la vérifier, de façon à choisir une méthode d'analyse appropriée des données expérimentales.

1.10 replication: The repetition of a complete set of all the treatments to be compared in an experiment. Each of the repetitions is called a "replicate".

NOTE — Since experimental error is almost invariably present, replication is required to increase the precision of the estimates of the effects. In order to do this effectively, all elements contributing to the experimental error should be included in the replication process. For some experiments, replication may be limited to repetition under essentially the same conditions, such as the same facility or location, a short time interval or a common batch of materials.

For other experiments requiring more general results, replication may require deliberately different, though similar, conditions, such as different facilities or locations, longer time intervals or different batches of materials.

In some experiments, a "pseudo-replication" occurs when factors which produce no effect (average or differential) are included in the experiment.

When a subset of the treatments within an experiment is repeated, this is generally referred to as "partial replication".

1.10 réplique: Répétition de la totalité des traitements qui doivent être comparés dans une expérience. Chaque répétition est appelée une «réplique».

NOTE — Une erreur expérimentale étant inéluctablement présente, une réplique est nécessaire si l'on veut augmenter la précision des estimations des effets. Pour obtenir effectivement ce résultat, tous les éléments intervenant dans l'erreur expérimentale devraient figurer dans le processus de réplique. Dans certaines expériences, la réplique peut consister en une simple répétition sous des conditions essentiellement identiques, telles que même agencement ou emplacement, court intervalle de temps, ou même lot de matériaux.

Dans d'autres expériences, destinées à fournir des résultats plus généraux, la réplique peut être exécutée sous des conditions volontairement différentes bien que similaires, telles que des agencements ou des emplacements différents, des intervalles de temps plus longs, ou des lots de matériaux différents.

Dans certaines expériences, une «pseudo-réplique» consiste à introduire des facteurs n'ayant aucun effet (moyen ou différentiel).

Lorsqu'un sous-ensemble de traitements est répété à l'intérieur d'une expérience, le terme généralement employé est «réplique partielle».

1.11 duplication: The execution of a treatment more than once under similar conditions.

NOTE — Duplication, as contrasted to replication, refers to a single element of an experiment. Duplication usually involves a fresh experimental unit, such as a new sample, or, when a single unit is involved, an independent resetting of the levels of the factors being studied on that unit. When duplicate observations are made on the same sample or unchanged settings, these should be identified as duplicate observations rather than as "duplicates" to reflect the narrower degree of duplication. Recent usage has broadened the definition of duplication to more than once rather than restricting it to twice.

1.11 réitération; «duplication»: Réalisation d'un traitement plus d'une fois sous des conditions similaires.

NOTE — Par opposition à la «réplique», la réitération ne concerne que des éléments particuliers d'une expérience. Généralement, la réitération utilise de nouvelles unités expérimentales, telles que de nouveaux échantillons, ou, dans le cas d'une seule unité, un réarrangement indépendant des niveaux des facteurs appliqués à cette unité. Lorsque des observations réitérées sont faites sur le même échantillon ou selon des conditions inchangées, il est préférable d'utiliser l'expression «observations réitérées» plutôt que «réitérations», afin de traduire le degré plus étroit de la réitération. L'usage récent a élargi la définition du terme «duplication» à plus d'une fois, plutôt que de le restreindre à deux fois.

1.12 randomization: The procedure used to allot treatments at random to the experimental units so as to provide a high degree of independence in the contributions of experimental error to estimates of treatment effects.

NOTE — An essential element in the design of experiments is to provide estimates of effects free from biases due to undetected assignable causes within the experimental space. Randomization is a process to minimize this risk. The operational procedure for assignment "at random" involves the use of Random Numbers or some similar method for assuring that each unit has an equal chance of being selected for each treatment.

1.12 randomisation: Procédure utilisée pour affecter des traitements au hasard aux unités expérimentales, en vue d'obtenir que les éléments qui contribuent à l'erreur expérimentale affectent de façon aussi indépendante que possible les estimations des effets des traitements.

NOTE — Un élément essentiel dans un plan d'expérience est d'obtenir des estimations des effets qui ne soient affectés d'aucun biais dû à des causes assignables non détectées à l'intérieur de l'espace expérimental. La randomisation est une technique permettant de minimiser le risque de biais. La procédure opérationnelle d'affectation «au hasard» comprend l'utilisation de nombres randomisés, ou toute autre méthode similaire permettant d'être sûr que chaque unité a la même chance d'être choisie pour chaque traitement.

1.13 main effect; average effect: A term describing a measure for the comparison of the responses at each level (version) of a factor averaged over all levels (versions) of other factors in the experiment.

NOTE — It should be noted that even though a "main effect" is indicated to be small, this does not necessarily mean that the factor is unimportant. Large effects of the factor may result at various levels (versions) of other factors, but may differ in sign and/or magnitude.

1.13 effet principal; effet moyen: Terme utilisé pour comparer les réponses moyennes obtenues aux différentes variantes (niveaux) d'un facteur, les moyennes étant prises pour toutes les variantes (niveaux) des autres facteurs inclus dans l'expérience.

NOTE — Il convient de noter que si l'effet principal d'un facteur apparaît comme petit, cela ne signifie pas que ce facteur soit peu important. Des effets importants d'un facteur peuvent exister lorsque ce facteur

The process of averaging in these cases would tend to make the "main effect" appear smaller. See *interaction* (1.14).

The term "main effect" may describe the parameter in an assumed model or the estimate of this parameter.

1.14 interaction: A term describing a measure of dependence on the level (version) or on other factors by providing the differential comparison of the responses for each level (version) of a factor at each of the several levels (versions) of one or more other factors.

NOTE — When an interaction is determined to be of sufficient magnitude, it is implied that the effect of variation within the factor is dependent upon the levels (versions) of the other factors. Since an "interaction" indicates a "differential effect", the effects of these factors should not simply be described in terms of averages over all levels (versions) of the other factors ("main effects") involved, but separately for each such level (version).

An interaction involving two factors (AB) is called a "two-factor interaction"; one involving three factors (ABC) is called a "three-factor interaction", etc.

Example

Factor B		Factor A Version	1	2	3	Average effect of B
Version	1		10	22	28	20
	2		20	20	20	20
Average effect of A			15	21	24	

An interpretation of these results, assuming little experimental error, is that changes in version of factor A affect the responses when using version 1 of factor B, but do not affect the responses when using version 2. Also, changes in version of factor B affect the responses when using version 1 of factor A in an opposite direction to when version 3 of factor A is used, etc. Note that the "main effect" of factor B would show no effect. If the results for version 2 of factor B had been 8, 20 and 26, there would be no interaction since the differences between the results of the two versions of B at each version of A (or the 3 versions of A at each version B) would be constant.

1.15 confounding: Combining indistinguishably the main effect of a factor or a differential effect between factors (interactions) with the effects of other factor(s), block factor(s) or interaction(s).

NOTE — Confounding is an important technique which permits the effective use of specified blocks in some experiment designs. This is accomplished by deliberately preselecting certain effects or differential effects as being of little interest, and arranging the design so that they are confounded with block effects or other preselected principal factor or differential effects, while keeping the other more important effects free from such complications. Sometimes, however, confounding results from inadvertent changes to a design during the running of an experiment or from incomplete planning of the design, and it serves to diminish, or even to invalidate, the effectiveness of an experiment.

est associé à différentes variantes (niveaux) des autres facteurs, mais ces effets peuvent différer en signe et/ou en importance. Le fait de prendre en considération leur moyenne tendra alors à faire apparaître l'effet principal comme petit. Voir 1.14 *interaction*.

Le terme «effet principal» s'applique soit au paramètre dans un modèle théorique, soit à l'estimation de ce paramètre.

1.14 interaction: Terme utilisé pour mesurer la dépendance des autres facteurs sur une variante, en fournissant la comparaison, à chaque variante (niveau) d'un facteur, des réponses obtenues aux différentes variantes (niveaux) d'un ou de plusieurs autres facteurs.

NOTE — Lorsqu'une interaction est suffisamment importante, cela signifie que l'écart imputable aux variantes (niveaux) d'un facteur dépend des variantes (niveaux) des autres facteurs. Puisqu'une «interaction» révèle un «effet différentiel», l'effet d'un facteur impliqué dans l'interaction ne devrait pas être simplement décrit en terme de moyenne pour toutes les variantes des autres facteurs (effet principal), mais séparément pour chaque variante.

Une interaction comportant deux facteurs (AB) est appelée «interaction à deux facteurs»; une interaction comportant trois facteurs (ABC) est appelée «interaction à trois facteurs», etc.

Exemple

Facteur B		Facteur A Variante	1	2	3	Effet moyen de B
Variante	1		10	22	28	20
	2		20	20	20	20
Effet moyen de A			15	21	24	

L'interprétation de ces résultats, en supposant que l'erreur expérimentale est faible, montre que le changement de variante du facteur A affecte la réponse lorsqu'on utilise la variante 1 du facteur B, mais ne l'affecte pas lorsqu'on utilise la variante 2. De même, le changement de variante du facteur B affecte la réponse lorsqu'on utilise la variante 1 du facteur A et aussi, mais en sens opposé, lorsqu'on utilise la variante 3, etc. À noter que «l'effet principal» du facteur B ne met en évidence aucun effet. Si les résultats pour la variante 2 du facteur B avaient été 8, 20 et 26, il n'y aurait eu aucune interaction du fait que les différences entre les résultats pour les deux variantes de B associées à chaque variante de A (ou pour les trois variantes de A associées à chaque variante de B) auraient été constantes.

1.15 confusion: Terme utilisé lorsque l'effet principal d'un facteur, ou l'effet différentiel entre facteurs (interaction) ne peut pas être séparé des effets d'autres facteurs, de facteurs blocs, ou d'interactions.

NOTE — La technique de confusion est importante en ce sens qu'elle permet, dans certains plans expérimentaux, l'emploi efficace de blocs dûment spécifiés. Elle consiste à choisir volontairement à l'avance certains effets, ou effets différentiels, considérés comme de peu d'intérêt, puis à construire le plan de telle façon qu'ils se trouvent confondus avec des effets blocs, ou d'autres effets principaux ou différentiels également choisis à l'avance, tandis que les effets les plus importants échappent à la confusion. Parfois, cependant, la confusion provient de modifications involontaires intervenant dans le plan au cours du déroulement d'une expérience, ou encore d'une planification incomplète; elle a alors pour conséquence de diminuer l'efficacité de l'expérience, ou même de rendre ses résultats sans valeur.

See *confounded factorial design* (2.2.5) and *factorial design with partial confounding* (2.2.6) for examples of confounding effects or differential effects (interactions) with block effects. See *fractional factorial design* (2.2.7) and *aliases* (2.2.8) when each effect is confounded with one or more other effects.

1.16 contrast: A linear function of the observations for which the sum of the coefficients is zero. With observations Y_1, Y_2, ..., Y_n, the linear function $a_1Y_1 + a_2Y_2 + \ldots + a_nY_n$ is a contrast if, and only if, $\Sigma a_i = 0$.

Example 1

A factor is applied at three levels and the results are represented by A_1, A_2, A_3. If the levels are equally spaced, the first question it might be logical to ask is whether there is an overall linear trend. This could be done by comparing A_1 and A_3, the extremes of A in the experiment. A second question might be whether there is evidence that the response pattern shows curvature rather than a simple linear trend. Here the average of A_1 and A_3 could be compared to A_2. (If there is no curvature, A_2 should fall on the line connecting A_1 and A_3 or, in other words, be equal to their average.)

Response	A_1	A_2	A_3
Contrast coefficients for question 1	-1	0	$+1$
Contrast 1	$-A_1$		$+A_3$
Contrast coefficients for question 2	$-1/2$	$+1$	$-1/2$
Contrast 2	$-1/2\,A_1$	$+A_2$	$-1/2\,A_3$

This example illustrates a regression type study of equally spaced continuous variables. It is frequently more convenient to use integers rather than fractions for contrast coefficients. In such a case, the coefficients for Contrast 2 would appear as $(-1, +2, -1)$.

Example 2

Another example dealing with discrete versions of a factor might lead to a different pair of questions. Let us suppose there are three sources of supply, one of which, A_1, uses a new manufacturing technique while the other two, A_2 and A_3, use the customary one. First, does vendor A_1 with the new technique seem to differ from A_2 and A_3 using the old one? Contrast A_1 with the average of A_2 and A_3. Second, do the two suppliers using the customary technique differ? Contrast A_2 and A_3. The pattern of contrast coefficients is similar to that for the previous problem, though the interpretation of the results will differ.

Response	A_1	A_2	A_3
Contrast coefficients for question 1	-2	$+1$	$+1$
Contrast 1	$-2\,A_1$	$+A_2$	$+A_3$
Contrast coefficients for question 2	0	-1	$+1$
Contrast 2		$-A_2$	$+A_3$

NOTE — The coefficients for a contrast may be selected arbitrarily provided the $\Sigma a_i = 0$ condition is met. Questions of logical interest from an experiment may be expressed as contrasts with carefully

Voir 2.2.5 *plan factoriel avec confusion* et 2.2.6 *expériences factorielles avec confusion partielle* pour des exemples de confusion d'effets ou d'effets différentiels (interactions) avec des effets blocs. Voir 2.2.7 *plan factoriel fractionné* et 2.2.8 *aliases* lorsque chaque effet est confondu avec un ou plusieurs autres effets.

1.16 contraste : Fonction linéaire des observations telle que la somme des coefficients est nulle. Les observations étant désignées par Y_1, Y_2, ..., Y_n, la fonction linéaire $a_1Y_1 + a_2Y_2 + \ldots + a_nY_n$ est un contraste si, et seulement si, $\Sigma a_i = 0$.

Exemple 1

Un facteur étant étudié à trois niveaux, les résultats sont représentés par A_1, A_2, A_3. Si les niveaux sont équidistants, la première question qu'il est logique de se poser, est de savoir s'il existe une tendance linéaire générale. Ceci peut se faire en comparant A_3 et A_1, qui correspondent aux niveaux extrêmes de A dans l'expérience. Une deuxième question peut être de savoir si le tableau des réponses fait apparaître de façon évidente une courbure et non une simple tendance linéaire. Pour cela, la moyenne de A_1 et A_3 est comparée à A_2 (s'il n'y a pas de courbure, A_2 doit tomber sur la ligne joignant A_1 et A_3 ou, en d'autres termes, être égal à leur moyenne).

Réponse	A_1	A_2	A_3
Coefficients de contraste pour la question 1	-1	0	$+1$
Contraste 1	$-A_1$		$+A_3$
Coefficients de contraste pour la question 2	$-1/2$	$+1$	$-1/2$
Contraste 2	$-1/2\,A_1$	$+A_2$	$-1/2\,A_3$

Cet exemple correspond à une étude de régression pour des variables continues également espacées. Il est généralement commode de prendre comme coefficients de contraste des nombres entiers plutôt que des fractions. Ainsi, dans le cas du contraste 2, on aurait comme coefficients de contraste $(-1, +2, -1)$.

Exemple 2

Une autre situation, portant sur un facteur à variantes discrètes, peut conduire à une autre paire de questions. C'est le cas, par exemple, d'une fourniture provenant de trois origines dont l'une, A_1, relève d'une nouvelle technique de fabrication, les deux autres, A_2 et A_3, relevant de la technique habituelle. Tout d'abord, la fourniture A_1 — nouvelle technique — apparaît-elle comme différente de A_2 et A_3 — ancienne technique? On forme le contraste entre A_1 et la moyenne de A_2 et A_3. En second lieu, les deux fournisseurs utilisant la technique habituelle diffèrent-ils? On forme le contraste entre A_2 et A_3. Le tableau des coefficients de contraste est semblable à celui du problème précédent, mais l'interprétation des résultats est différente.

Réponse	A_1	A_2	A_3
Coefficients de contraste pour la question 1	-2	$+1$	$+1$
Contraste 1	$-2\,A_1$	$+A_2$	$+A_3$
Coefficients de contraste pour la question 2	0	-1	$+1$
Contraste 2		$-A_2$	$+A_3$

selected coefficients. See the examples given on page 6. As indicated in the examples, the response for each treatment combination will have a set of coefficients associated with it. The number of linearly independent contrasts in an experiment is equal to one less than the number of treatments. Sometimes the term "contrast" is used only to refer to the pattern of the coefficients, but the usual meaning of this term is the algebraic sum of the responses multiplied by the appropriate coefficients.

1.17 orthogonal contrasts: Two contrasts are orthogonal if the contrast coefficients of the two sets satisfy the condition that, when multiplied in corresponding pairs, the sum of those products is equal to zero.

Example 1

		A_1	A_2	A_3
a_{i1}	Contrast 1	-1	0	$+1$
a_{i2}	Contrast 2	0	-1	$+1$
$a_{i1}\,a_{i2}$		0	0	$+1$

$$\sum a_{i1}\,a_{i2} = 1 \quad \therefore \quad \text{Not orthogonal}$$

Example 2

		A_1	A_2	A_3
a_{i1}	Contrast 1	-1	0	$+1$
a_{i2}	Contrast 2	-1	$+2$	-1
$a_{i1}\,a_{i2}$		$+1$	0	-1

$$\sum a_{i1}\,a_{i2} = 0 \quad \therefore \quad \text{Orthogonal}$$

NOTE — Orthogonal contrasts correspond to independent questions. Unless the contrasts are orthogonal, some confounding will result.

See *contrast analysis* (3.5).

1.18 predictor variable: A variable the levels (versions) of which are selected, such as a factor level in an experiment, whether the selection is in the control of the experimenter or not.

NOTE — This is sometimes referred to as an "independent variable".

1.19 response variable: The variable that shows the observed results of an experimental treatment.

NOTE — This is sometimes referred to as the "dependent variable".

1.20 assumed model: An equation which is intended to provide a functional description of the results/sources of information which may be obtained from an experiment.

NOTE — The assumed model will include a term for each potential assignable cause deemed of interest in the experiment, including the factors selected for study, combinations of these factors [to represent second or higher order effects such as curvature or differential (interaction) effects] and block factors.

NOTE — Les coefficients d'un contraste peuvent être choisis arbitrairement à condition que l'on ait $\Sigma a_i = 0$. Les questions présentant un intérêt logique dans une expérience donnée peuvent être exprimées par des contrastes dont les coefficients ont été soigneusement choisis. (Voir exemples en page 6.) Comme cela est indiqué dans les exemples, à la réponse obtenue pour chaque combinaison de traitements est associé un ensemble de coefficients. Le nombre des contrastes linéairement indépendants dans une expérience est égal au nombre de traitements diminué d'une unité. Parfois le terme « contraste » n'est utilisé que pour désigner le tableau des coefficients, mais l'acception usuelle de ce terme est la somme algébrique des résultats multipliés par les coefficients appropriés.

1.17 contrastes orthogonaux: Deux contrastes sont orthogonaux si leurs coefficients satisfont à la condition suivante: la somme des produits des coefficients qui se correspondent dans l'un et l'autre des contrastes est nulle.

Exemple 1

		A_1	A_2	A_3
a_{i1}	Contraste 1	-1	0	$+1$
a_{i2}	Contraste 2	0	-1	$+1$
$a_{i1}\,a_{i2}$		0	0	$+1$

$$\sum a_{i1}\,a_{i2} = 1 \quad \therefore \quad \text{non orthogonal}$$

Exemple 2

		A_1	A_2	A_3
a_{i1}	Contraste 1	-1	0	$+1$
a_{i2}	Contraste 2	-1	$+2$	-1
$a_{i1}\,a_{i2}$		$+1$	0	-1

$$\sum a_{i1}\,a_{i2} = 0 \quad \therefore \quad \text{orthogonal}$$

NOTE — Les contrastes orthogonaux correspondent à des questions indépendantes. La non-orthogonalité des caractères entraîne un effet de confusion.

Voir 3.5 *analyse de contrastes*.

1.18 variable de prédiction: Variable dont les variantes (niveaux) sont choisies, par exemple la variante d'un facteur dans une expérience, que ce choix soit ou non sous le contrôle de l'expérimentateur.

NOTE — Cette variable est parfois appelée « variable indépendante ».

1.19 variable de réponse: Variable donnant les résultats observés d'un traitement expérimental.

NOTE — Cette variable est parfois appelée « variable dépendante ».

1.20 modèle théorique: Équation qui a pour but de donner une expression fonctionnelle des résultats/sources d'informations que l'on peut obtenir dans une expérience.

NOTE — Le modèle théorique comprendra un terme pour chacune des causes assignables potentielles jugées dignes d'intérêt dans l'expérience, à savoir les facteurs sélectionnés pour étude, les combinaisons de ces facteurs [afin de représenter les effets d'ordre deux ou plus tels que les effets de courbure ou les effets différentiels (interactions)] et les facteurs blocs.

An examination of an assumed model before running the experiment is often useful in determining whether the type of experiment and the design will be adequate to answer the questions of interest.

A major use of such models is to furnish a prediction of what will be observed in the experiment space if future observations are taken. After running the experiment, the coefficients included in the model are estimated on the basis of the observed results, and the assumed (theoretical) model becomes an observed (empirical) model, which contains a term representing the experimental error. The models discussed within this part of ISO 3534 are linear with respect to the parameters to be estimated, but non-linear relationships are included under this definition.

Example

Two factors, (X_1) at two levels and (X_2) at three levels, are to be studied in a 2 × 3 factorial experiment (see 2.2.1) with replication in two blocks (a randomized block design). If it is assumed, as is frequently the case, that the response pattern can be approximated by a polynomial model, the fitted equation of the assumed model can be written:

Y	$=$	B_0	$+$	B_1X_1	$+$	B_2X_2
Estimated treatment response		Constant		Linear effect of factor X_1		Linear effect of factor X_2

$+$	$B_{22}X_2^2$	$+$	$B_{12}X_1X_2$	$+$	B_bX_b	$+$	e
	Curvature effect of factor X_2		Differential (interaction) effect of the two factors (linear)		Average effect of blocks		Random unexplained error

This notation using Y to represent the response value, X_i the predictor value and B_i the coefficients has been commonly used in regression studies [see *regression analysis* (3.3)]. In analysis of variance studies it has been common to use X as the response value and letters such as A and B as the factors. See *analysis of variance* (3.2).

1.21 residual error: The difference between the observed result and the predicted value (estimated treatment response) for that result based on the empirically determined "assumed model".

NOTE — For the purpose of this definition, the term "predicted value" is understood to be the estimated treatment response determined from the empirical model derived from the data of the experiment using the assumed model. Residual error includes experimental error and assignable sources of variation not taken into account by the model. A comparison of the "residual error" with the "experimental error" can be used to assess the validity of the assumed model since the "residual error" may include both "lack of fit" and "experimental error" components. The variance of the "residual error" is usually measured in an experiment by subtracting the pooled sum of squares for terms included in the assumed model from the total sum of squares and dividing by the corresponding difference in "degrees of freedom". See *experimental error* (1.7), *assumed model* (1.20) and *regression analysis* (3.3).

1.22 response surface: The pattern of predicted responses based on the assumed model derived from the experiment observations.

L'examen du modèle théorique préalablement à la réalisation de l'expérience est souvent utile pour savoir si le type d'expérience et son plan permettront de répondre aux questions auxquelles on s'intéresse.

Les modèles sont principalement utilisés pour prédire ce que l'on observera dans l'espace expérimental lors d'observations ultérieures. Après la réalisation de l'expérience, les coefficients inclus dans le modèle sont estimés sur la base des résultats observés et le modèle théorique devient un modèle observé (empirique) qui contient un terme représentant l'erreur expérimentale. Les modèles mentionnés dans la présente partie de l'ISO 3534 sont linéaires en ce qui concerne les paramètres à estimer, mais la définition ci-dessus inclut les relations non linéaires.

Exemple

Deux facteurs, (X_1) à deux niveaux et (X_2) à trois niveaux, doivent être étudiés dans une expérience factorielle 2 × 3 (voir 2.2.1), avec une réplique en deux blocs (plan en blocs randomisés). Si l'on suppose, comme c'est fréquemment le cas, que l'ensemble des réponses peut être représenté approximativement par un modèle polynomial, l'équation du modèle théorique peut s'écrire:

Y	$=$	B_0	$+$	B_1X_1	$+$	B_2X_2
Réponse estimée du traitement		Constante		Effet linéaire du facteur X_1		Effet linéaire du facteur X_2

$+$	$B_{22}X_2^2$	$+$	$B_{12}X_1X_2$	$+$	B_bX_b	$+$	e
	Effet de courbure du facteur X_2		Effet différentiel (interaction) des deux facteurs (linéaire)		Effet moyen des blocs		Erreur aléatoire et inexpliquée

Cette notation dans laquelle Y représente la valeur de la réponse, X_i les valeurs des variables de prédiction et B_i les coefficients, est généralement utilisée dans les études de régression. Voir 3.3 *analyse et régression*. En analyse de variance, on utilise habituellement X pour la valeur de la réponse et des lettres telles que A et B pour les facteurs. Voir 3.2 *analyse de variance*.

1.21 erreur résiduelle: Différence entre le résultat observé et la valeur prévue pour ce résultat (réponse estimée du traitement) sur la base du modèle théorique déterminé empiriquement.

NOTE — Dans cette définition, le terme «valeur prévue» s'entend comme étant la réponse du traitement estimée à partir du modèle empirique déduit du modèle théorique en utilisant les résultats de l'expérience. L'erreur résiduelle inclut l'erreur expérimentale et les causes de variation assignables non prises en considération dans le modèle. Une comparaison de l'«erreur résiduelle» et de l'«erreur expérimentale» peut être utilisée pour vérifier la validité du modèle théorique, l'erreur résiduelle pouvant inclure à la fois l'«inadéquation du modèle» et l'«erreur expérimentale». La variance de l'«erreur résiduelle» est généralement calculée en soustrayant de la somme des carrés totale la somme des carrés imputables à chacun des termes inclus dans le modèle théorique, puis en divisant la différence ainsi obtenue par le «nombre de degrés de liberté». Voir 1.7 *erreur expérimentale*, 1.20 *modèle théorique* et 3.3 *analyse de régression*.

1.22 surface de réponse: Représentation des réponses prévues, basée sur le modèle théorique déduit des observations expérimentales.

NOTE — A sequential form of experimentation is often used in conjunction with the mapping of response surfaces in which the responses of the earlier phases are used to help predict where to select additional treatment combinations for study so as to optimize results efficiently. This approach is termed "response surface methodology".

NOTE — Une expérimentation séquentielle est souvent utilisée conjointement avec le tracé de la surface de réponse, les réponses des stades précédents étant utilisées pour aider à choisir les combinaisons de traitement supplémentaires. Cette approche porte le nom de « méthodologie des surfaces de réponse ».

1.23 evolutionary operation (EVOP): A sequential form of experimentation conducted in production facilities during regular production.

1.23 expérimentation évolutive (EVOP): Forme d'expérimentation séquentielle réalisée lors de la fabrication régulière d'un produit.

NOTE — The principal theses of EVOP are that knowledge to improve the process should be obtained along with a product, and that designed experiments using relatively small shifts in factor levels (within production tolerances) can yield this knowledge at minimum cost. The range of variation of the factors for any one EVOP experiment is usually quite small in order to avoid making out-of-tolerance products, and this may require considerable replication so as to reduce the effect of random variation.

NOTE — Les idées de base sur lesquelles repose cette forme d'expérimentation sont les suivantes: d'une part, la connaissance nécessaire à l'amélioration d'un processus de fabrication s'obtient en cours de production et, d'autre part, des expériences planifiées n'utilisant que des variations relativement faibles dans les niveaux des facteurs (à l'intérieur des tolérances de fabrication) peuvent fournir cette connaissance à un coût minimum. Dans toute expérience EVOP, l'intervalle de variation des facteurs est habituellement très faible, afin d'éviter la fabrication de produits hors tolérance, ce qui peut nécessiter de nombreuses répliques en vue de réduire l'effet des facteurs aléatoires de variation.

2 Arrangements of experiments

2.1 Types of design

2.1.1 completely randomized design: A design in which the treatments are assigned at random to the full set of experimental units.

NOTE — No block factors are involved in a completely randomized design.

2.1.2 randomized block design: A design in which the experiment space is subdivided into blocks of experimental units, the units within each block being more homogeneous than units in different blocks. In each block the treatments are randomly allocated to the experimental units within each block and replicated in several blocks with a separate randomization for each block.

Example

Four treatments A, B, C and D are assigned at random to the experimental units in each of three blocks.

Block	1	B	A	C	D
	2	C	B	D	A
	3	B	C	A	D

NOTE — If the whole of the experimental material, area or time is not homogeneous, it may be possible to stratify the material into homogeneous groups or blocks. This is one of the methods for controlling the variability of experimental units. For the completely randomized design, no stratification of the experimental units is made. In the randomized block design the treatments are randomly allotted within each block, i.e. the randomization is restricted.

2 Dispositifs expérimentaux

2.1 Types de plan

2.1.1 plan complètement randomisé: Plan dans lequel les traitements sont affectés au hasard à l'ensemble des unités expérimentales.

NOTE — Un plan complètement randomisé ne fait intervenir aucun facteur bloc.

2.1.2 plan en blocs randomisés: Plan dans lequel l'espace expérimental est divisé en blocs d'unités expérimentales, les unités à l'intérieur de chaque bloc étant plus homogènes que dans des blocs différents. Dans chaque bloc, les traitements sont affectés au hasard aux unités expérimentales. Les répétitions constituées par les différents blocs donnent lieu à une randomisation propre à chaque bloc.

Exemple

Quatre traitements A, B, C et D sont affectés au hasard aux unités expérimentales dans chacun des trois blocs:

Bloc	1	B	A	C	D
	2	C	B	D	A
	3	B	C	A	D

NOTE — Lorsque l'ensemble expérimental, matériau, surface ou durée d'exécution, n'est pas homogène, une stratification en groupes ou blocs homogènes peut s'avérer possible: la constitution de ces blocs est l'une des méthodes permettant de contrôler la variabilité des unités expérimentales. Dans les plans complètement randomisés, aucune stratification des unités expérimentales n'est effectuée. Dans les plans en blocs randomisés, où les traitementss sont affectés au hasard à l'intérieur de chaque bloc, on effectue une « randomisation restreinte ».

2.1.3 Latin square: A design involving three factors, each at n versions (levels), in which the combination of the versions of any one of them with the versions of the other two appears once and only once in an experiment of size n^2.

Example ($n = 4$)

Factor 2 (columns)

Factor 1 (rows)	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

Versions of the third factor are shown by the Latin letters.

NOTE — Latin square designs are generally used to eliminate two block effects, not of primary interest in the experiment, by "balancing out" their contributions. See *block* (1.8). The blocks are customarily identified with the rows and columns of the square. For example, the rows might be days and the columns, operators. The number of versions (n) of the principal factor and of each of the block factors has to be the same. The number of treatments will thus be n^2. Randomization can be achieved by assigning at random the versions of the principal factor to the letters, randomly selecting a Latin square from the listings or by the procedures described in statistical tables such as those in "Statistical Tables" by Fisher and Yates and assigning the versions of the block factors at random to the rows and columns of the square. [There are: 1 (2×2); 12 (3×3); 576 (4×4); 161 280 (5×5) Latin squares. Of these, there are: 1 (2×2); 1 (3×3); 4 (4×4); 56 (5×5) "standard" Latin squares in which the first row and first column are in alphabetical order, and from which the other Latin squares can be derived by permuting the rows and columns.]

A basic assumption is that these block factors do not interact (cause differential effects) with the principal factor under study, or among themselves. If this assumption is not valid, the measure of residual error will be increased, and the effect of the factor is confounded with such interactions. The design is particularly useful, when the assumptions are valid, for minimizing the amount of the experimentation. Sometimes other principal factors are used in the block positions so that there may be three principal factors without any block factors. This is equivalent to a fractional factorial with the assumption of no interactions. Some *fractional factorial designs* (2.2.7) form Latin squares and it may be more desirable to approach the problem from the fractional factorial viewpoint to understand the assumption being made concerning interactions.

2.1.4 Graeco-Latin square: A design involving four factors, each at n versions (levels), in which the combination of the versions of any one of them with the versions of the other three appears once and only once in an experiment of size n^2.

2.1.3 carré latin: Plan faisant intervenir trois facteurs dans lequel la combinaison des variantes de chaque facteur, chacun ayant n variantes (niveaux), avec les variantes des deux autres apparaît une fois, et une fois seulement, dans une expérience de dimensions n^2.

Exemple ($n = 4$)

Facteur 2 (colonnes)

Facteur 1 (lignes)	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

Les variantes du troisième facteur sont désignées par des lettres latines.

NOTE — Les plans en carré latin sont généralement utilisés pour éliminer deux effets blocs, sans intérêt essentiel dans l'expérience, en équilibrant leurs contributions (voir 1.8 *bloc*). Les blocs sont généralement identifiés par les lignes et les colonnes du carré; par exemple les lignes peuvent représenter des journées et les colonnes des opérateurs. Le nombre de variantes (n) du facteur principal et de chacun des facteurs blocs doit être identique: le nombre de traitements est donc n^2. La randomisation peut s'effectuer en attribuant au hasard les variantes du facteur principal aux lettres puis en choisissant de manière aléatoire un carré latin dans des listes ou selon les procédures décrites dans des tables statistiques telles que les «Tables statistiques» de Fisher et Yates, enfin en affectant au hasard les variantes des facteurs blocs aux lignes et colonnes du carré. [Il y a: 1 carré (2×2); 12 carrés (3×3); 576 carrés (4×4); 161 280 carrés (5×5). Parmi ceux-ci, il y a: 1 carré (2×2); 1 carré (3×3); 4 carrés (4×4); 56 carrés (5×5) dits carrés latins «standard» dans lesquels la première ligne et la première colonne suivent l'ordre alphabétique et à partir desquels d'autres carrés latins peuvent être obtenus par permutation des lignes et des colonnes.]

Une hypothèse de base est que les facteurs blocs n'ont d'interaction (n'entraînent pas d'effets différentiels), ni avec le facteur principal étudié, ni entre eux. Si cette hypothèse n'est pas réalisée, l'importance de l'erreur résiduelle se trouve accrue et l'effet du facteur se trouve confondu avec des interactions. Lorsque l'hypothèse est satisfaite, le plan est particulièrement utile pour réduire la dimension de l'expérience. Parfois ce sont des facteurs principaux que l'on place dans les positions blocs, de sorte qu'il peut y avoir trois facteurs principaux sans aucun facteur bloc. Cette disposition correspond à un plan factoriel fractionné, sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interaction. Certains plans factoriels fractionnés (voir 2.2.7) constituent en fait des carrés latins et il peut être préférable d'aborder le problème du point de vue «factoriel fractionné», afin de comprendre les hypothèses relatives aux interactions.

2.1.4 carré gréco-latin: Plan faisant intervenir quatre facteurs, chacun ayant n variantes (niveaux), dans lequel la combinaison des variantes de chaque facteur avec les variantes des trois autres apparaît une fois, et une fois seulement, dans une expérience de dimensions n^2.

Example ($n = 3$)

Factor 2 (columns)

Factor 1 (rows)

	1	2	3
1	$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
2	$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$
3	$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$

Factor 3 — Latin letters

Factor 4 — Greek letters[1)]

NOTE — The comments in the note in 2.1.3 are also pertinent here, modified by the extension to four factors. Graeco-Latin squares are generally used to eliminate three block effects. A Graeco-Latin square does not exist for squares of size 6.

A generalization of the Graeco-Latin square for more than four factors is known as the "hyper Graeco-Latin square".

2.1.5 incomplete block design: A design in which the experiment space is subdivided into blocks in which there are insufficient experimental units available to run a complete set of treatments ("replicate") of the experiment.

2.1.5.1 balanced incomplete block design (BIB): An incomplete block design in which each block contains the same number k of different versions from the t versions of a single principal factor arranged so that every pair of versions occurs together in the same number λ of blocks from the b blocks.

Example

$t = 7, k = 4, b = 7, \lambda = 2$

Versions of the principal factor

Block				
1	1	2	3	6
2	2	3	4	7
3	3	4	5	1
4	4	5	6	2
5	5	6	7	3
6	6	7	1	4
7	7	1	2	5

NOTE — The design implies that every version of the principal factor appears the same number of times r in the experiment and that the following relations hold true:

$bk = tr$ and $r(k - 1) = \lambda(t - 1)$

For randomization, arrange the blocks and versions within each block independently at random. Since each letter in the above equations represents an integer, it is clear that only a restricted set of combinations (t, k, b, r, λ) is possible for constructing balanced incomplete block designs.

1) Frequently numerical subscripts are used in place of Greek letters.

Exemple ($n = 3$)

Facteur 2 (colonnes)

Facteur 1 (lignes)

	1	2	3
1	$A\alpha$	$B\gamma$	$C\beta$
2	$B\beta$	$C\alpha$	$A\gamma$
3	$C\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$

Facteur 3 — lettres latines

Facteur 4 — lettres grecques[1)]

NOTE — Les commentaires de la note en 2.1.3 s'appliquent également ici, en les étendant à quatre facteurs. Les carrés gréco-latins sont généralement utilisés pour éliminer trois effets blocs. Il n'existe pas de carré gréco-latin 6 × 6.

Une généralisation du carré gréco-latin pour plus de quatre facteurs est connue sous le nom de «carré hypergréco-latin».

2.1.5 plan en blocs incomplets: Plan dans lequel l'espace expérimental est divisé en blocs à l'intérieur desquels il n'existe pas un nombre suffisant d'unités expérimentales pour constituer un ensemble complet de traitements («réplique») de l'expérience.

2.1.5.1 plan en blocs incomplets équilibrés: Plan en blocs incomplets dans lequel chaque bloc contient le même nombre k de variantes parmi les t variantes d'un facteur unique principal, chaque paire de variantes apparaissant ensemble dans le même nombre λ de blocs parmi les b blocs.

Exemple

$t = 7, k = 4, b = 7, \lambda = 2$

Variantes du facteur principal

Bloc				
1	1	2	3	6
2	2	3	4	7
3	3	4	5	1
4	4	5	6	2
5	5	6	7	3
6	6	7	1	4
7	7	1	2	5

NOTE — Un tel plan implique que chaque variante du facteur principal figure un même nombre de fois r dans l'expérience et que les relations suivantes soient satisfaites:

$bk = tr$ et $r(k - 1) = \lambda(t - 1)$

La randomisation s'effectue indépendamment d'une part, pour les blocs et d'autre part, pour les variantes à l'intérieur de chaque bloc. Chaque lettre représentant un nombre entier dans les équations ci-dessus, il est clair qu'il n'existe qu'un ensemble restreint de combinaisons (t, k, b, r, λ) pour la construction de plans en blocs incomplets équilibrés.

1) On utilise fréquemment des indices numériques à la place des lettres grecques.

2.1.5.2 partially balanced incomplete block design (PBIB): An incomplete block design in which each block contains the same number k of different versions from the t versions of the principal factor. They are arranged so that not all pairs of versions occur together in the same number of the b blocks; some versions can therefore be compared with greater precision than others.

NOTE — The design implies that every version of the principal factor appears the same number of times r in the experiment.

Example

$t = 6, k = 4, b = 6, r = 4, n_1 = 1, n_2 = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

Block	Versions of the principal factor			
1	1	4	2	5
2	2	5	3	6
3	3	6	1	4
4	4	1	5	2
5	5	2	6	3
6	6	3	4	1

In this design every version occurs $r = 4$ times and if we start with any version (e.g. version 1), we find $n_1 = 1$ version (e.g. version 4) that appears together with version 1 in $\lambda_1 = 4$ blocks and $n_2 = 4$ versions (Nos. 2, 3, 5 and 6) that appear together with version 1 in $\lambda_2 = 2$ blocks. These parameters n_1, n_2, λ_1 and λ_2 are the same whatever the starting version may be.

2.1.6 Youden square: A type of block design derived from certain Latin squares by deleting, or adding, rows (or columns) so that one block factor remains complete blocks and the second block factor constitutes balanced incomplete blocks.

Example 1

Block factor 2 (columns)

Block factor 1 (rows)	1	2	3	4
1	*A*	*D*	*C*	*B*
2	*B*	*A*	*D*	*C*
3	*C*	*B*	*A*	*D*
deleted from the Latin square	~~*D*~~	~~*C*~~	~~*B*~~	~~*A*~~

The elimination of the 4th row of the 4×4 Latin square yields this 3×4 Youden square.

Example 2

If the columns in the example under 2.1.5.1 were considered as blocks (a second block factor), it will be seen that 3 columns from a 7×7 Latin square have been ignored, and the design would be a Youden square.

2.1.5.2 plan en blocs incomplets partiellement équilibrés: Plan comprenant b blocs, dans lequel chaque bloc contient le même nombre k de variantes différentes parmi les t variantes du facteur principal, mais dans lequel les paires de variantes n'apparaissent pas toutes dans le même nombre de blocs; certaines variantes peuvent ainsi être comparées avec une plus grande précision que d'autres.

NOTE — Un tel plan implique que chaque variante du facteur principal apparaisse le même nombe r de fois dans l'expérience.

Exemple

$t = 6, k = 4, b = 6, r = 4, n_1 = 1, n_2 = 4, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

Bloc	Variantes du facteur principal			
1	1	4	2	5
2	2	5	3	6
3	3	6	1	4
4	4	1	5	2
5	5	2	6	3
6	6	3	4	1

Dans ce plan, chaque variante figure $r = 4$ fois. Partant d'une variante quelconque, par exemple la variante 1, on trouve $n_1 = 1$ variante (la variante 4) jumelée avec la variante 1 dans $\lambda_1 = 4$ blocs et $n_2 = 4$ variantes (2, 3, 5 et 6) jumelée avec la variante 1 dans $\lambda_2 = 2$ blocs. Les paramètres n_1, n_2, λ_1 et λ_2 sont les mêmes quelle que soit la variante de départ.

2.1.6 carré de Youden: Type de plan en blocs dérivé de certains carrés latins en supprimant ou en ajoutant des lignes (ou des colonnes), de telle sorte que le premier facteur bloc reste en «blocs complets», tandis que le deuxième facteur bloc devient un «bloc incomplet équilibré».

Exemple 1

Facteur bloc 2 (colonnes)

Facteur bloc 1 (lignes)	1	2	3	4
1	*A*	*D*	*C*	*B*
2	*B*	*A*	*D*	*C*
3	*C*	*B*	*A*	*D*
Supprimé du carré latin	~~*D*~~	~~*C*~~	~~*B*~~	~~*A*~~

La suppression de la quatrième ligne du carré latin 4×4 conduit à un carré de Youden 3×4.

Exemple 2

Si les colonnes de l'exemple en 2.1.5.1 sont considérées comme des blocs (deuxième facteur bloc), on peut constater que trois colonnes d'un carré latin 7×7 ont été supprimées, le plan devenant ainsi un carré de Youden.

2.1.7 split-plot design: A design in which the group of experimental units (plot) to which the same version of a principal factor is assigned is subdivided (split) so that one or more additional principal factors may be studied within each version of that factor.

Example

Three versions of factor A are tested in two replicate runs. Within each version of A, the same two versions of factor B are studied.

Plot	Replicate I		Replicate II	
A_1	$A_1 B_2$	$A_1 B_1$	$A_1 B_2$	$A_1 B_1$
A_2	$A_2 B_1$	$A_2 B_2$	$A_2 B_1$	$A_2 B_2$
A_3	$A_3 B_1$	$A_3 B_2$	$A_3 B_2$	$A_3 B_1$

NOTE — In the example, replicates serve the role of blocks to the first-stage principal factor (A) and each plot assigned to one of the three versions of A serves the role of blocks for the additional second-stage principal factor B (within plot factor) studied within A. Thus, the experimental error for the within-plot factor B should be smaller than that for the full experiment (if there indeed is some effect of varying the first factor). In a split-plot design, different measures of residual error are obtained for the within-plot and the between-plot effects. It is possible to extend this design further in order to introduce a third-stage factor included in the versions of the second-stage factor. This type of design is frequently used where large runs or areas are obtainable from a factor the levels of which are not easily changed, and the other factors can be varied readily within the runs or areas.

This type of arrangement is common in industrial experimentation as well as in agriculture (whence the name is derived). Frequently, one series of treatments requires a large bulk of experimental material, while another series can be compared with smaller amounts. For instance, the comparison of different types of furnaces used to prepare an alloy would need greater amounts of alloy than the comparison of different types of moulds into which the alloy might be poured. The types of furnaces are regarded as the versions of the first-stage factor and the types of moulds as the versions of the second-stage (within-plot) factor. Another example is a large machine the speed of which can be changed only by replacing the gear train, a time-consuming and expensive task, so that infrequent changes to this factor are desired. The material manufactured at each speed can be heat-treated by several techniques, shaped under varying pressures and smoothed using different polishing agents with relative ease of shifting from one level (version) of these factors to another. These latter constitute the within-plot factors (or second-stage factors) while the speed variations constitute the between-plot factor (or first-stage factor).

2.1.8 split-block design; two-way split-plot design: A split-plot design in which the versions of the second-stage factor, instead of being randomized independently within each plot, are arranged in strips across plots in each replication. Thus, it is considered as a split-plot design in two different ways.

2.1.7 plan en parcelles subdivisées: Plan dans lequel le groupe des unités expérimentales (parcelles) auquel la même variante d'un facteur principal est affectée, est subdivisé de telle sorte qu'un ou plusieurs facteurs principaux supplémentaires peuvent être étudiés à l'intérieur de chaque variante de ce facteur.

Exemple

Trois variantes du facteur A sont étudiées avec deux «répliques». À l'intérieur de chaque variante de A, les deux mêmes variantes du facteur B sont étudiées:

Parcelle	Réplique I		Réplique II	
A_1	$A_1 B_2$	$A_1 B_1$	$A_1 B_2$	$A_1 B_1$
A_2	$A_2 B_1$	$A_2 B_2$	$A_2 B_1$	$A_2 B_2$
A_3	$A_3 B_1$	$A_3 B_2$	$A_3 B_2$	$A_3 B_1$

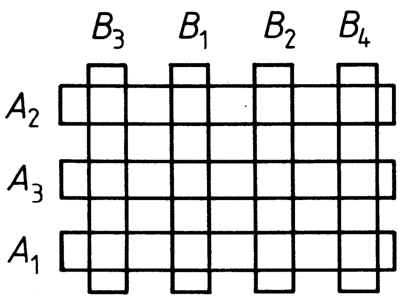
NOTE — Dans cet exemple, les répliques jouent le rôle de blocs à l'égard du premier facteur principal (A) et chaque parcelle attribuée à l'une des trois variantes de A joue le rôle de bloc à l'égard du facteur principal supplémentaire B (facteur intra-parcelles) étudié à l'intérieur de A. L'erreur expérimentale pour le facteur B intra-parcelles est normalement plus petite que celle qui intervient dans l'expérience toute entière (s'il existe effectivement une variation due au premier facteur). Dans un plan en parcelles subdivisées, on obtient donc des mesures différentes de l'erreur résiduelle, d'une part pour les effets intérieurs aux parcelles, d'autre part pour les effets entre parcelles. Il est possible de généraliser ce plan en introduisant un troisième facteur inclus dans les variantes du deuxième facteur. Ce type de plan est fréquemment utilisé lorsque de longues séries ou de larges surfaces correspondent à un facteur dont les niveaux ne peuvent pas être aisément modifiés, alors qu'il est facile de faire varier les autres facteurs à l'intérieur de ces séries ou de ces surfaces.

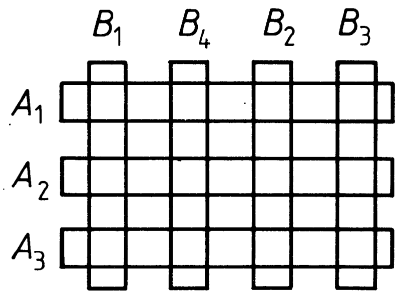
Cette situation se présente aussi bien dans les expériences du domaine industriel que du domaine agronomique (d'où l'origine de son nom). Très souvent une série de traitements nécessite une grande quantité de matériau expérimental alors qu'une autre série de traitements ne nécessite que des quantités plus petites. Par exemple, la comparaison de différents types de four utilisés pour préparer un alliage nécessite des quantités plus importantes d'alliage que la comparaison des différents types de moules où l'alliage est versé. Les types de fours sont considérés comme les variantes du premier facteur et les types de moules comme les variantes du deuxième facteur (intra-parcelles). Un autre exemple est celui d'une machine importante dont la vitesse ne peut être modifiée qu'en remplaçant la boîte de vitesses, ce qui demande du temps et un travail coûteux: il est donc souhaitable de ne pas intervenir fréquemment sur ce facteur. Le matériau produit à chaque vitesse peut faire l'objet d'un traitement thermique par plusieurs techniques, être mis en forme sous différentes pressions, ou poli au moyen de différents abrasifs, le passage de l'une à l'autre variante (ou niveau) étant pour ces facteurs relativement facile. Ceux-ci sont les facteurs intra-parcelles (facteurs «du second ordre»), tandis que la modification de vitesse est le facteur inter-parcelles (facteur «du premier ordre»).

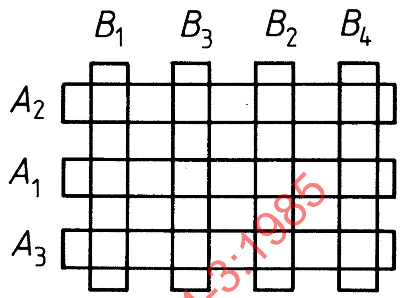
2.1.8 plan en blocs subdivisés: Plan en parcelles subdivisées dans lequel les variantes du deuxième facteur, au lieu d'être randomisées indépendamment à l'intérieur de chaque parcelle, sont dans chaque réplique disposées. Dans le même ordre, on peut considérer ce plan comme étant un plan en parcelles subdivisées de deux façons différentes.

Example

For a 3×4 design, the appropriate arrangements (after randomization) might be as shown below.







NOTE — The design sacrifices precision on the main effects (average effects) of A and B in order to provide higher precision on the interactions (differential effects), which will generally be more accurately determined than in either randomized blocks or the ordinary split-plot design.

In industrial experimentation, practical considerations sometimes necessitate its use; for example in the textile industry, factor A may be different procedures of bleaching by chlorine peroxide and factor B those of rising by different amounts of hydrogen peroxide in the cooling process.

2.1.9 mixture design: A design in which two or more ingredients or components shall be mixed and the response is a property of the resulting mixture that does not depend upon the amount of the mixture. The proportions of each of the q components (X_i) in the mixture shall satisfy the conditions $0 < X_i < 1$ and

$\sum_{i=1}^{q} X_i = 1$; and each experimental point is defined in terms of these proportions.

NOTES

1 In some fields of application the experiment mixtures are described by the terms "formulation" or "blend". The use of mixture designs is appropriate for experimenting with the formulations of manufactured products, such as paints, gasoline, foods, rubber and textiles.

2 In some applications, the proportions of the components of the mixture may vary between 0 and 100 % of the mixture ("complete domain"). In others, there may be operative restraints, so that at least one component cannot attain 0 or 100 % ("reduced domain").

2.2 Factorial experiments

2.2.1 factorial experiment (general): An experiment in which all possible treatments formed from two or more factors, each being studied at two or more levels (versions), are examined so that interactions (differential effects) as well as main effects can be estimated.

Exemple

Dans un plan 3×4 les arrangements appropriés (après randomisation) peuvent être les suivants:

NOTE — Ce plan sacrifie une partie de la précision sur les effets principaux (effets moyens) de A et B, afin d'obtenir une plus grande précision sur les interactions (effets différentiels), celles-ci étant généralement déterminées avec plus de précision que dans les plans en blocs randomisés ou les plans en parcelles subdivisées classiques.

En expérimentation industrielle, certaines considérations d'ordre pratique rendent nécessaire l'utilisation de ce dispositif; par exemple, dans l'industrie textile, le facteur A peut représenter différentes procédures de blanchissage au peroxyde de chlore et le facteur B le rinçage avec différentes quantités de peroxyde d'hydrogène lors du refroidissement.

2.1.9 plan pour l'étude de mélanges: Plan dans lequel deux ou plusieurs ingrédients ou composants doivent être mélangés, la réponse étant une propriété du mélange résultant, indépendante de la quantité du mélange. Les proportions de chacun des q composants (X_i) du mélange doivent satisfaire aux conditions: $0 < X_i < 1$ et

$\sum_{i=1}^{q} X_i = 1$; chaque point expérimental est défini en termes de ces proportions.

NOTES

1 Dans certains domaines d'application, les mélanges expérimentaux sont décrits en termes de «formule» ou «mixture». L'utilisation des plans ci-dessus est recommandée dans les expériences portant sur des produits manufacturés tels que peintures, essences, produits alimentaires, caoutchouc et textiles.

2 Dans certaines applications, les proportions des composants du mélange peuvent varier entre 0 et 100 % du mélange («domaine complet»). Dans d'autres, il peut y avoir des contraintes opératoires, la proportion d'au moins un composant ne pouvant atteindre 0 ou 100 % («domaine réduit»).

2.2 Expériences factorielles

2.2.1 expérience factorielle (en général): Expérience dans laquelle on étudie tous les traitements possibles formés à partir de 2 facteurs ou plus, chaque facteur comportant 2 variantes (niveaux) ou plus, de telle sorte que les interactions (effets différentiels) ainsi que les effets principaux puissent être estimés.

NOTE — The term is descriptive of the combining of the various factors in all possible combinations, but in itself does not describe the experiment design in which these combinations, or a subset of these combinations, will be studied.

The most commonly used designs for the selected arrangement of the factorial treatment combinations are the completely randomized design, the randomized block design and the balanced incomplete block design, but other also are used.

A factorial experiment is usually described symbolically as the product of the number of levels (versions) of each factor. For example, an experiment based on 3 levels of factor A, 2 versions of factor B and 4 levels of factor C would be referred to as a $3 \times 2 \times 4$ factorial. The product of these numbers indicates the number of factorial treatments.

When a factorial experiment includes factors all having the same number of levels (versions), the description is usually given in terms of the number of levels raised to the power equal to the number of factors, n. Thus, an experiment with three factors all run at two levels would be referred to as a 2^3 factorial (n being equal to 3) and has 8 factorial treatments.

Some commonly used notations for describing the treatment combinations for a factorial experiment are:

(1) Use a letter to indicate the factor and a numerical subscript the level (version) of the factor, e.g., three factors A, B and C in a $2 \times 3 \times 2$ factorial. The 12 combinations would be:

$A_1B_1C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_2C_1$, $A_1B_3C_1$, $A_2B_3C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_2C_2$, $A_1B_3C_2$, $A_2B_3C_2$.

Sometimes only the subscripts, listed in the same order as the factors, are used, such as:

111, 211, 121, 221, 131, 231, 112, 212, 122, 222, 132, 232

A variation which permits the use of modulo 2 and modulo 3 arithmetic for the purpose of listing the treatment combinations in blocked and fractional designs is:

000, 100, 010, 110, 020, 120, 001, 101, 011, 111, 021, 121

(2) Describe the levels in terms of the number of unit deviations from the centre level, including sign. In the case of an even number of levels where there is no actual treatment at the centre level, the coefficients describing the levels are usually given in terms of half-unit deviations. For example, with two levels, if a unit of deviation between these levels is 4 mm, the -1 coefficient might be assigned to 3 mm and the $+1$ to 7 mm with 0 being assigned to the non-included 5 mm level. In the above example the code would appear as

$(-1, -1, -1)$; $(+1, -1, -1)$; $(-1, 0, -1)$; $(+1, 0, -1)$; $(-1, +1, -1)$; $(+1, +1, -1)$; $(-1, -1, +1)$; $(+1, -1, +1)$; $(-1, 0, +1)$; $(+1, 0, +1)$; $(-1, +1, +1)$; $(+1, +1, +1)$.

NOTE — Le terme général «expérience factorielle» signifie que les différents facteurs sont combinés de toutes les façons possibles, mais en lui-même, il ne décrit pas le plan expérimental dans lequel ces combinaisons, ou une partie d'entres elles, seront étudiées.

Les plans les plus fréquemment utilisés, pour le choix et l'arrangement des combinaisons factorielles, sont: le plan complètement randomisé, le plan en blocs randomisés et le plan en blocs incomplets équilibrés, mais d'autres plans sont également utilisés.

Une expérience factorielle est généralement représentée symboliquement par le produit du nombre de variantes (niveaux) de chaque facteur. Par exemple, une expérience faisant intervenir 3 niveaux du facteur A, 2 variantes du facteur B et 4 niveaux du facteur C sera référencée comme plan factoriel $3 \times 2 \times 4$. Le résultat du produit donne le nombre total de traitements.

Lorsque, dans une expérience factorielle, tous les facteurs ont le même nombre de variantes (niveaux), la définition de l'expérience est généralement donnée sous la forme du nombre de niveaux élevé à une puissance égale au nombre n de facteurs. Si par exemple pour une expérience où 3 facteurs sont étudiés, chacun à 2 niveaux, on obtient une expérience factorielle 2^3 (n étant égal à 3) comportant 8 traitements.

Les notations les plus souvent utilisées pour définir les combinaisons de traitements dans une expérience factorielle sont les suivantes:

(1) Utiliser une lettre pour désigner le facteur et un indice numérique pour désigner sa variante (niveau). Soit par exemple, 3 facteurs A, B et C dans une expérience factorielle $2 \times 3 \times 2$. Les 12 combinaisons seront

$A_1B_1C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_2C_1$, $A_1B_3C_1$, $A_2B_3C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_2C_2$, $A_1B_3C_2$, $A_2B_3C_2$.

Parfois seuls les indices énumérés dans le même ordre que les facteurs sont utilisés, à savoir:

111, 211, 121, 221, 131, 231, 112, 212, 122, 222, 132, 232.

Une autre notation, qui permet l'utilisation des arithmétiques modulo 2 et modulo 3 pour l'énumération des combinaisons de traitements dans les plans en blocs fractionnés est:

000, 100, 010, 110, 020, 120, 001, 101, 011, 111, 021, 121.

(2) Désigner les niveaux par le nombre d'unités d'écarts par rapport au niveau central, avec son signe. Lorsque les niveaux sont en nombre pair, aucun traitement n'existant au niveau central, les coefficients désignant les niveaux sont généralement donnés en demi-unités d'écart. Par exemple, avec 2 niveaux, si l'unité d'écart entre ces deux niveaux est 4 mm, le coefficient -1 peut être attribué à 3 mm et le coefficient $+1$ à 7 mm; le coefficient 0 correspondrait à 5 mm, niveau non inclus dans l'expérience. Dans l'exemple ci-dessus le code serait

$(-1, -1, -1)$; $(+1, -1, -1)$; $(-1, 0, -1)$; $(+1, 0, -1)$; $(-1, +1, -1)$; $(+1, +1, -1)$; $(-1, -1, +1)$; $(+1, -1, +1)$; $(-1, 0, +1)$; $(+1, 0, +1)$; $(-1, +1, +1)$; $(+1, +1, +1)$.

This descriptive coding has many advantages, particularly in analysing contrasts when levels are equally spaced. Unequal spacing of the levels or weighted emphasis for the various versions can also be reflected in the coefficients.

2.2.2 2^n factorial experiment: A factorial experiment in which n factors are studied, each of them in two levels (versions).

NOTE — The 2^n factorial is a special case of the general factorial. See *factorial experiment (general)* (2.2.1). A popular code is to indicate a small letter when a factor is at its high level, and omit the letter when it is at its low level. When factors are at their low level the code is (1).

Example illustrating the note above

A 2^3 factorial with factors A, B, and C.

	Level							
Factor A	Low	High	Low	High	Low	High	Low	High
Factor B	Low	Low	High	High	Low	Low	High	High
Factor C	Low	Low	Low	Low	High	High	High	High
Code	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc

This type of identification has advantages for defining blocks, confounding and aliasing. See *confounded factorial design* (2.2.5) and *fractional factorial design* (2.2.7).

Factorial experiments, regardless of the form of analysis used, essentially involve contrasting the various levels (versions) of the factors.

Example illustrating contrasts

Two-factor, two-level factorial 2^2 with factors A and B

$$A = [a - (1)] + [ab - b]$$

is the contrast of A at the "low" level of B plus the contrast of A at the "high" level of B.

$$B = [b - (1)] + [ab - a]$$

is the contrast of B at the "low" level of A plus the contrast of B at the "high" level of A.

$$AB = [ab - b] - [a - (1)] = [ab - a] - [b - (1)]$$

is the contrast of the contrasts of A at the "high" level of B and at the "low" level of B or the contrast of the contrasts of B at the "high" level of A and at the "low" level of A.

Each contrast can be derived from the development of a "symbolic product" of two factors, these factors being of the form $(a \pm 1)$, $(b \pm 1)$, using -1 when the capital letter (A, B) is included in the contrast and $+1$ when it is not.

Thus

A : $(a - 1)(b + 1)$

B : $(a + 1)(b - 1)$

AB : $(a - 1)(b - 1)$

Ce système de codage présente de nombreux avantages, particulièrement dans l'analyse des contrastes, lorsque les niveaux sont également espacés. Des espacements inégaux, ou une pondération différente des variantes, peuvent aussi être représentés dans les coefficients.

2.2.2 expérience factorielle 2^n: Expérience factorielle dans laquelle on étudie n facteurs, chacun comportant deux variantes (niveaux).

NOTE — L'expérience factorielle 2^n est un cas particulier de l'expérience factorielle [voir 2.2.1 *expérience factorielle (en général)*]. Un codage usuel consiste à adopter une lettre minuscule pour le niveau supérieur du facteur, et à omettre la lettre pour le niveau inférieur. Lorsque tous les facteurs sont au niveau inférieur, le code est (1).

Exemple illustrant la note précédente

Expérience factorielle 2^3 avec les facteurs A, B, C.

	Niveaux							
Facteur A	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut
Facteur B	Bas	Bas	Haut	Haut	Bas	Bas	Haut	Haut
Facteur C	Bas	Bas	Bas	Bas	Haut	Haut	Haut	Haut
Code	(1)	a	b	ab	c	ac	bc	abc

Ce mode d'identification présente des avantages pour la définition des blocs, des systèmes de confusion et d'aliases. (Voir 2.2.5 *plan factoriel avec confusion* et 2.2.7 *plan factoriel fractionné*.)

Les expériences factorielles, quel que soit le type d'analyse utilisé, font essentiellement intervenir les contrastes entre les différentes variantes (niveaux) des facteurs.

Exemple illustrant les contrastes

Dans un plan factoriel 2^2 à 2 facteurs (A et B) et 2 niveaux

$$A = [a - (1)] + [ab - b]$$

c'est-à-dire le contraste de A au niveau inférieur de B plus le contraste de A au niveau supérieur de B.

$$B = [b - (1)] + [ab - a]$$

c'est-à-dire le contraste de B au niveau inférieur de A plus le contraste de B au niveau supérieur de A.

$$AB = [ab - b] - [a - (1)] = [ab - a] - [b - (1)]$$

c'est-à-dire le contraste des contrastes de A au niveau supérieur et au niveau inférieur de B, ou le contraste des contrastes de B au niveau supérieur et au niveau inférieur de A.

Chaque contraste peut être obtenu à partir du développement d'un «produit symbolique» de 2 facteurs, ceux-ci étant de la forme $(a \pm 1)$, $(b \pm 1)$, en utilisant -1 quand la lettre capitale (A, B) est incluse dans le contraste et $+1$ dans le cas contraire.

Ainsi

A : $(a - 1)(b + 1)$

B : $(a + 1)(b - 1)$

AB : $(a - 1)(b - 1)$

These expressions are usually written in a standard order, in this case

$$A \;:\; -(1) + a - b + ab$$

$$B \;:\; -(1) - a + b + ab$$

$$AB: \;\; (1) - a - b + ab$$

Note that the coefficient of each treatment combination in AB ($+1$ or -1) is the product of the corresponding coefficients in A and B. This property is general in 2^n factorial experiments. After normalization, the A term represents the effect of A averaged over the two levels of B, i.e. a "main effect" or "average effect". Similarly, B represents the average effect of B over both levels of A. The AB term contrasts the effect of A at the high and the low levels of B (or the effect of B at the high and low levels of A), i.e. an "interaction" or "differential effect".

This example is, of course, the simplest case, but it illustrates the basic principles. The contrasts may appear more complex as additional factors are introduced.

2.2.3 completely randomized factorial design: A factorial experiment (including all replications) run in a completely randomized design.

2.2.4 randomized block factorial design: A factorial experiment run in a randomized block design in which each block includes a complete set of factorial combinations.

2.2.5 confounded factorial design: A factorial experiment in which only a fraction of the treatments are run in each block and where the selection of the treatments assigned to each block is arranged so that one or more prescribed effects is(are) confounded with the block effect(s), while the other effects remain free from confounding. All factor level combinations are included in the experiment.

Example

In a 2^3 factorial with only room for 4 treatments per block, the ABC interaction (ABC: $-(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc$) can be sacrificed through confounding with blocks without loss of any other effect if the blocks include:

	Block 1	Block 2
Treatment Combination (Code identification shown in 2.2.2)	(1)	*a*
	ab	*b*
	ac	*c*
	bc	*abc*

NOTE — The treatments to be assigned to each block can be determined once the effect(s) to be confounded is(are) defined. Where only one term is to be confounded with blocks, as in this example, those with a positive sign are assigned to one block and those with a negative sign to the other. There are generalized rules for more complex situations. A check on all of the other effects (A, B, AB, etc.) will show the balance of the plus and minus signs in each block, thus eliminating any confounding with blocks for them.

Ces expressions sont généralement écrites dans un ordre normalisé, tel que le suivant:

$$A \;:\; -(1) + a - b + ab$$

$$B \;:\; -(1) - a + b + ab$$

$$AB: \;\; (1) - a - b + ab$$

À noter que le coefficient de chaque combinaison de traitement dans AB ($+1$ ou -1) est le produit des coefficients correspondants dans A et B; cette propriété est générale dans les plans factoriels 2^n. Après division par 2, le terme A représente la moyenne des effets de A aux deux niveaux de B, c'est-à-dire l'«effet principal», ou «effet moyen» de A. De même, après division par 2, B représente l'effet moyen de B aux deux niveaux de A. Le terme AB oppose l'effet de A au niveaux supérieur et inférieur de B (ou l'effet de B aux niveaux supérieur et inférieur de A), ce qui correspond à une «interaction» ou un «effet différentiel».

Cet exemple correspond naturellement au cas le plus simple, mais il illustre bien les principes de base. Les contrastes deviennent plus complexes lorsqu'on introduit des facteurs supplémentaires.

2.2.3 plan factoriel complètement randomisé: Expérience factorielle (comprenant toutes les répliques) exécutée selon un plan complètement randomisé.

2.2.4 plan factoriel en blocs randomisés: Expérience factorielle réalisée selon un plan en blocs randomisés, chaque bloc contenant la totalité des combinaisons factorielles.

2.2.5 plan factoriel avec confusion: Plan factoriel dans lequel une partie seulement des traitements est réalisée dans un même bloc, le choix des traitements dans chaque bloc étant tel qu'un ou plusieurs effets dument choisis se trouvent confondus avec l'effet bloc ou les effets bloc, les autres effets échappant à cette confusion. L'expérience contient toutes les combinaisons factorielles.

Exemple

Dans une expérience factorielle 2^3 où il n'y a place dans les blocs que pour 4 traitements, l'interaction ABC (ABC: $-(1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc$) se trouve sacrifiée par confusion avec les blocs, sans qu'il y ait perte d'aucun autre effet, si les blocs sont constitués de la façon suivante:

	Bloc 1	Bloc 2
Combinaisons de traitements (code d'identification défini en 2.2.2)	(1)	*a*
	ab	*b*
	ac	*c*
	bc	*abc*

NOTE — Les traitements à attribuer à chaque bloc se trouvent déterminés dès que l'effet ou les effets destinés à être confondus ont été définis. Lorsqu'un seul effet doit être confondu avec les blocs comme dans cet exemple, les combinaisons à signe positif sont attribuées à l'un des blocs et celles à signe négatif à l'autre. (Il existe des règles tout à fait générales pour des situations plus complexes.) On peut vérifier que, pour tous les effets autres que ABC (A, B, AB, etc.), il y a égalité de signes + et − dans chaque bloc, ces effets échappant ainsi à toute confusion avec l'effet bloc.

2.2.6 factorial experiments with partial confounding: A factorial experiment with several replicates in at least some of which some main effects or interactions confounded in other replicates are free from confounding.

Example

In a 2^3 factorial experiment requiring the use of blocks of 4 (see 2.2.5) and carried out with 2 replicates, the following arrangement is selected so that the ABC interaction is confounded in replicate 1 and the BC interaction in replicate 2:

Replicate 1		Replicate 2	
Block 1	Block 2	Block 1	Block 2
(1)	*a*	(1)	*b*
ab	*b*	*a*	*c*
ac	*c*	*bc*	*ab*
bc	*abc*	*abc*	*ac*

The estimate of BC can be obtained only from replicate 1 and that of ABC only from replicate 2. The remaining estimates of A, B, C, AB and AC are obtainable using both replicates and therefore will have greater precision.

2.2.7 fractional factorial design: A factorial experiment in which only an adequately chosen fraction of the treatments required for the complete factorial experiment is selected to be run. This procedure is sometimes called "fractional replication".

NOTE — The fraction selected is obtained by choosing one or several "defining contrasts" which are considered of minor importance, or negligible, generally interaction(s) of high order.

These "defining contrasts" cannot be estimated and thus are sacrificed. By "adequately chosen" is meant selection according to specified rules which include consideration of effects to be confounded and aliased [see *confounding* (1.10) and *aliases* (2.2.8)].

Fractional factorial designs are often used very effectively in screening tests to determine which factor or factors are effective, or as part of a sequential series of tests, but there are risks of getting biased estimates of main effects or of misjudging the relative importance of various factors. When there is a large number of factor level combinations resulting from a large number of factors to be tested, it is often impracticable to test all the combinations with one experiment. In such cases resort may be made to a fractional, i.e. partial, replication. The usefulness of these designs stems from the fact that, in general, higher order interactions are not likely to occur. When this assumption is not valid, biased estimates will result.

2.2.6 plan factoriel avec confusion partielle: Plan factoriel comportant plusieurs répliques, définies de telle façon que des effets principaux ou des interactions, confondus dans certaines répliques, échappent à toutes confusion dans les autres répliques.

Exemple

Dans une expérience factorielle 2^3 exigeant l'utilisation des blocs de 4 (voir 2.2.5) et effectuée avec deux répliques, l'arrangement ci-après est tel que l'interaction ABC est confondue dans la réplique 1 et l'interaction BC dans la réplique 2:

Réplique 1		Réplique 2	
Bloc 1	Bloc 2	Bloc 1	Bloc 2
(1)	*a*	(1)	*b*
ab	*b*	*a*	*c*
ac	*c*	*bc*	*ab*
bc	*abc*	*abc*	*ac*

L'estimation de BC ne peut être obtenue qu'à partir de la réplique 1, et celle de ABC à partir de la réplique 2. Les estimations de A, B, C, AB et AC, obtenues en utilisant les deux répliques, sont plus précises.

2.2.7 plan factoriel fractionné: Expérience factorielle dans laquelle n'est réalisée qu'une fraction des combinaisons, sélectionnée de façon appropriée dans l'ensemble des combinaisons de traitements nécessaires pour une expérience factorielle complète. Cette procédure est parfois appelée «réplique fractionnée».

NOTE — La fraction sélectionnée s'obtient à partir d'un ou de plusieurs «contrastes de définition» qui sont considérés comme étant de faible importance ou négligeables, généralement des interactions d'ordre élevé.

Ces «contrastes de définition» ne peuvent pas être estimés et sont donc sacrifiés. Par «choisir de façon appropriée», il faut entendre que le choix s'effectue conformément à des règles spécifiées incluant la prise en considération des effets qui se trouveront confondus, ou «aliases» (voir 1.10 et 2.2.8).

Les plans factoriels fractionnés se révèlent souvent très utiles dans les essais de «screening» destinés à déterminer le ou les facteur(s) efficaces ou encore lorsqu'ils constituent une partie d'une succession d'essais; par contre, ils présentent le risque de conduire à des estimations biaisées des effets principaux, ou à des appréciations erronnées sur l'importance relative des différents facteurs. Dans le cas d'un grand nombre de combinaisons de traitements résultant d'un grand nombre de facteurs à tester, il n'est souvent pas possible d'essayer toutes les combinaisons dans une seule expérience; on peut alors faire appel à un plan fractionné, ou réplique partielle. L'utilité de ces plans résulte du fait que généralement l'existence des interactions de l'ordre le plus élevé est peu vraisemblable. Cependant, si cette hypothèse n'est pas valable, il en résultera des estimations biaisées.

Example

Two half-replicates of a 2^4 factorial (refer to 2.2.2 for the code interpretation).

Defining contrast: $ABCD$

+	−
abcd	*abc*
ab	*abd*
ac	*acd*
ad	*bcd*
bc	*a*
bd	*b*
cd	*c*
(1)	*d*

Either of these half-replicates can be used as a "fractional replicate".

NOTE — In the example, the factorial combinations in the first column are those with a + (plus) sign in the development of the symbolic product of the $ABCD$ "defining contrast", as illustrated in the example of 2.2.2.

$$ABCD = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

Those factorial combinations in the second column are those with a − (minus) sign.

Because only those elements of the $ABCD$ interaction having the same sign are run, no $ABCD$ contrast measure is obtainable, so that the $ABCD$ interaction is completely confounded and unestimable. In addition, it will be found that because only half of the full factorial experiment is run, each contrast represents two effects.

From the + sign fractional replicate in the above example, we would compute the factorial effects as follows:

$$A = (abcd) + (ab) + (ac) + (ad) - (bc) - (bd) - (cd) - (1) = BCD$$

$$AB = (abcd) + (ab) + (cd) + (1) - (ac) - (ad) - (bc) - (bd) = CD$$

Effects represented by the same contrast are named "aliases". See *aliases* (2.2.8). Note that had the complete set of factorial treatments been run instead of only half of them, the estimates of the A and BCD or AB and BC effects would no longer be identical. That is

$$A = (a-1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

is not equal to

$$BCD = (a+1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

when all 16 combinations are included instead of only 8. This example, and the comments thereon, have been limited to the 2^n factorial experiments. A comparable, but more difficult, approach is available when there are more than two versions, but another approach to these situations is through the use of the composite design defined in 2.2.10.

Exemple

Deux demi-répliques d'un plan factoriel 2^4 (voir 2.2.2 pour l'interprétation du code).

«Contraste de définition»: $ABCD$

+	−
abcd	*abc*
ab	*abd*
ac	*acd*
ad	*bcd*
bc	*a*
bd	*b*
cd	*c*
(1)	*d*

L'une ou l'autre de ces demi-répliques peut être utilisée comme «réplique fractionnée».

NOTE — Dans cet exemple, les combinaisons factorielles de la première colonne sont celles qui sont affectées du signe + dans le développement du produit symbolique du «contraste de définition» $ABCD$ présenté dans l'exemple de 2.2.2.

$$ABCD = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

Les combinaisons factorielles de la deuxième colonne sont celles affectées du signe −.

Aucune mesure du contraste $ABCD$ ne peut être obtenue, car ne sont réalisés que les termes de l'interaction $ABCD$ affectés du même signe, de sorte que l'interaction $ABCD$ est complètement confondue et ne peut être estimée. Par ailleurs, chaque contraste, comme on peut le constater, représente deux effets, du fait que la moitié seulement de l'expérience factorielle complète est réalisée.

À partir de la réplique fractionnée affectée du signe + dans l'exemple ci-dessus, les effets factoriels se calculent comme suit:

$$A = (abcd) + (ab) + (ac) + (ad) - (bc) - (bd) - (cd) - (1) = BCD$$

$$AB = (abcd) + (ab) + (cd) + (1) - (ac) - (ad) - (bc) - (bd) = CD$$

Les effets représentés par le même contraste sont appelés «aliases» (voir 2.2.8). À noter que si l'ensemble complet des traitements factoriels et non la moitié seulement d'entre eux avait été réalisé, les estimations des effets A et BCD ou AB et BC ne seraient plus identiques. En effet, lorsque les 16 combinaisons sont réalisées (au lieu de 8 seulement)

$$A = (a-1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

n'est pas égal à

$$BCD = (a+1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

Cet exemple et ses commentaires ont été limités à des expériences factorielles 2^n. Une approche similaire, mais plus difficile, est utilisable pour plus de 2 variantes, mais une autre approche consiste à utiliser les plans composites définis en 2.2.10.

2.2.8 aliases: Two or more effects (main or interaction) in a fractional factorial experiment which are estimated by the same contrast and which, therefore, cannot be estimated separately.

NOTES

1 The determination of which effects in a 2^n factorial are "aliased" can be made once the "defining contrast" (in the case of a half replicate) or "defining contrasts" (for a fraction smaller than 1/2) are stated. The "defining contrast" is that effect (or effects), usually thought to be of no consequence, about which all information may be sacrificed for the experiment. An identity I is equated to the "defining contrast" (or "defining contrasts") and, using the convention that $A^2 = B^2 = C^2 = I$, the multiplication of the letters on both sides of the equation shows the aliases. In the example of 2.2.7

$$I = ABCD$$

so that

$$A = A^2BCD = BCD$$

and

$$AB = A^2B^2CD = CD$$

2 With a large number of factors (and factorial treatment combinations) the size of the experiment can be reduced to 1/4, 1/8, or in general to $\frac{1}{2^k}$ to from a 2^{n-k} fractional factorial.

3 There exist generalizations of the above to factorials having more than 2 levels.

2.2.9 orthogonal design: A design in which all pairs of factors at particular levels (versions) appear together an equal number of times.

Example

Table of orthogonal arrays derived for 1/2 replicate of a 2^4 factorial shown below.

2.2.8 aliases; effets inséparables: Deux effets ou plus (principaux ou interactions) qui, dans une expérience factorielle fractionnée, sont estimés par le même contraste et, en conséquence, ne peuvent pas être estimés séparément.

NOTES

1 Les effets qui, dans un plan factoriel 2^n, sont inséparables dès que le « contraste de définition » (dans le cas d'une demi-réplique) ou les « contrastes de définition » (pour un fractionnement supérieur à 2) ont été choisis. Les contrastes de définition sont des effets généralement considérés comme sans intérêt et pour lesquels toute information peut être sacrifiée dans l'expérience. Le symbole d'identité I représentant le ou les « contrastes de définition » et la convention $A^2 = B^2 = C^2 = I$ étant adoptée, la multiplication par I du groupe de lettres représentant un effet fait apparaître son « aliase ». Dans l'exemple de 2.2.7

$$I = ABCD$$

de sorte que

$$A = A^2BCD = BCD$$

et

$$AB = A^2B^2CD = CD$$

2 Avec un grand nombre de facteurs (et de combinaisons de traitements factoriels) la taille de l'expérience peut être réduite à 1/4, 1/8 ou en général à $\frac{1}{2^k}$. On obtient ainsi un plan factoriel fractionné 2^{n-k}.

3 Les principes énoncés ci-dessus se généralisent à des plans factoriels ayant plus de 2 niveaux.

2.2.9 plan orthogonal: Plan dans lequel toutes les paires de facteurs, à chacune de leurs variantes (niveaux) figurent ensemble un même nombre de fois.

Exemple

Le tableau d'orthogonalité dans une demi-réplique d'un plan factoriel 2^4 figure ci-dessous.

Treatment No. **Traitement n°**	**Array No. / Arrangement n°** 1	2	3	4	5	6	7	**Treatments for a / Traitements** full 2^3 factorial / dans un plan factoriel 2^3	1/2 replicate of a 2^4 factorial / dans une demi réplique d'un plan factoriel 2^4
1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	(1)	(1)
2	1	−1	−1	−1	−1	1	1	*a*	*ad*
3	−1	1	−1	−1	1	−1	1	*b*	*bd*
4	1	1	1	−1	−1	−1	−1	*ab*	*ab*
5	−1	−1	1	1	−1	−1	1	*c*	*cd*
6	1	−1	−1	1	1	−1	−1	*ac*	*ac*
7	−1	1	−1	1	−1	1	−1	*bc*	*bc*
8	1	1	1	1	1	1	1	*abc*	*abcd*
2^3 factorial contrast name Contraste dans le plan factoriel 2^3	A	B	AB	C	AC	BC	ABC		
1/2 replicate 2^4 (or 2^{4-1}) fractional factorial contrast name Contrastes dans une demi-réplique du plan factoriel fractionné 2^4 (ou plan 2^{4-1})	$\left\{\begin{matrix} A \\ + \\ BCD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} B \\ + \\ ACD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} AB \\ + \\ CD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} C \\ + \\ ABD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} AC \\ + \\ BD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} BC \\ + \\ AD \end{matrix}\right.$	$\left\{\begin{matrix} D \\ + \\ ABC \end{matrix}\right.$	{ Aliased contrasts Contrastes inséparables (aliases) NOTE — Defining contrast $ABCD$ cannot be estimated. NOTE — Le contraste de définition $ABCD$ ne peut pas être estimé.	

NOTE — Orthogonal designs include a wide variety of special designs such as a *Latin square* (2.1.3), a *completely randomized factorial design* (2.2.3), a *fractional factorial design* (2.2.7) and so forth, which are already defined or derived. It is also possible, and useful, to construct an orthogonal design by using appropriate tables of orthogonal arrays in which the sum of products of elements in any pair of arrays, adjusted by the mean of the array, is equal to zero.

Statistical analysis of the results from experiments using orthogonal designs is generally relatively simple since each main effect and interaction may be evaluated independently. However, non-orthogonal designs, which may be planned or accidental (such as by the loss of data due to missing tests or gross errors), lead to more difficult, or sometimes impossible, statistical interpretation. The degree of difficulty is dependent on the nature of the non-orthogonality. See the first note in 3.3.

2.2.10 composite design: A design developed specifically for fitting second order response surfaces to study curvature, constructed by adding further selected treatments to those obtained from a 2^n factorial (or its fraction).

Example

If the coded levels of each factor are -1 and $+1$ in the 2^n factorial [see notation 2 under comment on 2.2.1 *factorial experiment (general)*] the $(2n + 1)$ additional combinations for a "central composite design" are

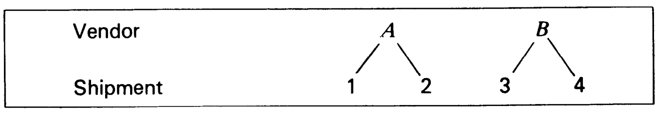
$(0, 0, \ldots, 0), (\pm\alpha, 0, 0, \ldots, 0), 0, \pm\alpha, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, \pm\alpha)$.

The total number of treatments to be tested is $(2^n + 2n + 1)$ for a fractional 2^n factorial.

NOTE — For $n = 2$, 3 and 4 the experiment requires, 9 15 and 25 units respectively, although additional duplicate runs of the centre point are usual, as compared with 9, 27 and 81 in the 3^n factorial. The reduction in experiment size results in confounding, and thereby sacrificing, all information about curvature interactions. The value of α can be chosen to make the coefficients in the quadratic polynomials as orthogonal as possible to one another or to minimize the bias that is created if the true form of response surface is not quadratic.

2.3 nested experiment; hierarchical experiment: An experiment to examine the effect of two or more factors in which the same level (version) of a factor cannot be used with all levels (versions) of the other factors.

Example



If two vendors are to be compared by evaluating two shipments from each, there ordinarily is no direct relationship between the first shipment of vendor A and that of vendor B or similarly for the second shipment.

NOTE — Les plans orthogonaux comprennent une grande variété de plans particuliers tels que les *carrés latins* (2.1.3), les *plans factoriels complètement randomisés* (2.2.3), les *plans factoriels fractionnés* (2.2.7), et autres plans déjà définis ou qui en dérivent. Il est également possible et utile de construire un plan orthogonal à partir de tables appropriées d'arrangements orthogonaux tels que la somme des produits des éléments dans chaque paire de rangs, ajustée à la moyenne de l'arrangement, est égale à 0.

L'analyse statistique des résultats d'expériences utilisant des plans orthogonaux est généralement relativement simple, chaque effet principal et chaque interaction pouvant être estimés indépendamment. Par contre, les plans non orthogonaux, qu'ils aient été planifiés comme tels ou qu'ils soient accidentels (en raison, par exemple de la perte de données due à des résultats manquants, ou d'erreurs grossières), conduisent à une interprétation statistique plus difficile, voir impossible. Le degré de difficulté dépend de la nature de la non-orthogonalité. Voir la première note de 3.3.

2.2.10 plan composite: Plan spécifiquement mis en œuvre en vue de l'ajustement de la courbure des surfaces de réponse du deuxième ordre; il est construit en choisissant et en ajoutant de nouvelles combinaisons de traitements à celles d'un plan factoriel 2^n (ou une fraction de celui-ci).

Exemple

Si dans un plan factoriel 2^n les niveaux codés de chaque facteur sont -1 et $+1$ [voir notation (2) du commentaire de 2.2.1 *expérience factorielle (en général)*], les combinaisons supplémentaires en nombre $(2n + 1)$ dans un «plan composite centré» sont

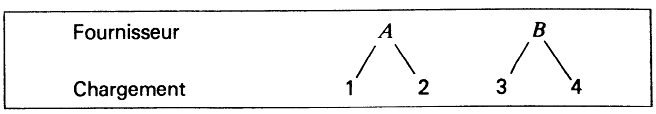
$(0, 0, \ldots, 0), (\pm\alpha, 0, 0, \ldots, 0), (0, \pm\alpha, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, \pm\alpha)$.

Le nombre total de combinaisons de traitements intervenant dans ce plan est ainsi $(2^n + 2n + 1)$.

NOTE — Pour $n = 2$, 3 et 4, l'expérience nécessite respectivement 9, 15 et 25 unités — à noter cependant qu'il est courant d'effectuer une réitération supplémentaire au point central — à comparer aux 9, 27 et 81 unités du plan factoriel 3^n. La réduction de la taille de l'expérience aboutit à un effet de confusion et, de ce fait, à la perte complète d'information sur les interactions de courbure. La valeur de α peut être choisie de manière à rendre les coefficients de polynomes du deuxième degré aussi orthogonaux que possible, ou à minimiser le biais qui résulterait d'une forme réelle non quadratique de la surface de réponse.

2.3 expérience emboîtée; expérience hiérarchisée: Expérience destinée à étudier l'effet de deux ou plusieurs facteurs, dans laquelle la même variante (niveau) d'un facteur ne peut pas être utilisée avec toutes les variantes (niveaux) des autres facteurs.

Exemple



Si l'on veut comparer deux fournisseurs à partir de deux chargements de chacun d'eux, il n'y a généralement aucune relation directe entre le premier chargement du fournisseur A et celui du fournisseur B et de même pour le deuxième chargement.

The differences between the two versions of the shipment factor of vendor A are nested within that version of the vendor factor and, similarly, the differences between the two versions of the shipment factor of vendor B are nested within this other version of the vendor factor.

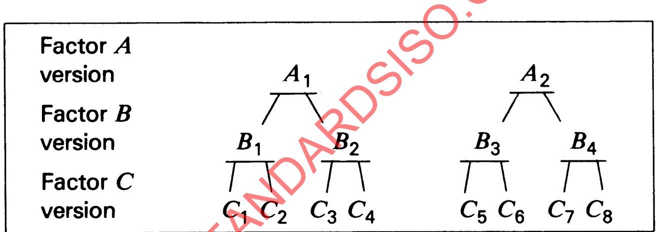
NOTE — Generally, nested experiments are used to evaluate studies in terms of components of variance rather than in terms of differences in response levels or prediction models. See the note in 3.2.2.

It is sometimes possible to redefine the factor into versions that can be compared across other factors if that makes a more meaningful question. For example, shipments 1 and 3 of the above example might represent Monday morning production and shipments 2 and 4 Friday afternoon production. The question could be framed in terms of Monday morning versus Friday afternoon production, which has a common thread, rather than in terms of two unrelated shipments. This would now represent a crossed [i.e. each level (version) of a factor is used with all levels (versions) of the other factors], rather than nested, classification and could be arranged as a factorial experiment.

	Vendor	A	B
Day	Monday	1	1
	Friday	2	2

2.3.1 fully nested experiment: A nested experiment in which the second factor is nested within levels (versions) of the first factor and each succeeding factor is nested within versions of the previous factor.

Example



2.3.2 staggered nested experiment: A nested experiment in which the nested factors are run within only a subset of the versions of the first or succeeding factors.

Example

In the example for a *fully nested experiment* (2.3.1), version C_3 or C_4 and C_7 or C_8 might be eliminated, so that factor C is studied in only versions 1 and 3 of factor B. In this arrangement, the variability of C would be estimated with only half the precision of the arrangement in 2.3.1.

La différence entre les deux variantes du facteur chargement pour le fournisseur A est «emboîtée» à l'intérieur de cette variante du facteur fournisseur; de même la différence entre les deux variantes du facteur chargement pour le fournisseur B est «emboîtée» à l'intérieur de cette autre variante du facteur fournisseur.

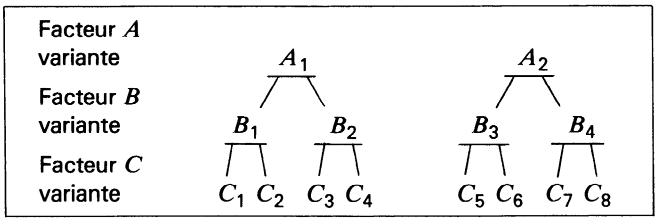
NOTE — Généralement les expériences emboîtées sont utilisées pour une interprétation en terme de composantes de variance, plutôt qu'en terme de différences entre niveaux de réponse, ou modèles de prévision (voir la note de 3.2.2).

Il est parfois possible, si cela correspond à une interprétation plus objective de redéfinir l'un des facteurs en variantes qui peuvent être comparées en croisement avec les autres facteurs. Par exemple, les chargements 1 et 3 de l'exemple ci-dessus peuvent représenter la production du lundi matin et les chargements 2 et 4 celle du vendredi après-midi. La question peut alors être énoncée en terme de comparaison de la production du lundi matin à celle du vendredi après-midi qui ont une trame commune, plutôt qu'en comparaison de deux chargements sans relation l'un avec l'autre. On obtient ainsi une classification «croisée» plutôt qu'«emboîtée» [chaque variante (niveau) d'un facteur est utilisée à toutes les variantes (niveaux) des autres facteurs], qui se présente comme une expérience factorielle.

	Fournisseur	A	B
Jour	lundi	1	1
	vendredi	2	2

2.3.1 expérience complètement emboîtée: Expérience emboîtée dans laquelle le deuxième facteur est complètement emboîté à l'intérieur des niveaux (variantes) du premier facteur, et chacun des facteurs suivants emboîté à l'intérieur des variantes du facteur précédent.

Exemple



2.3.2 expérience irrégulièrement emboîtée: Expérience emboîtée dans laquelle les facteurs emboîtés ne sont mis en œuvre qu'à l'intérieur d'un sous-ensemble de variantes du premier facteur (ou de l'un des suivants).

Exemple

Si, dans l'exemple de 2.3.1 *expérience complètement emboîtée*, les variantes C_3 ou C_4, et C_7 ou C_8, peuvent être éliminées, le facteur C n'est étudié que pour les variantes 1 et 3 du facteur B. Dans cet arrangement, la variabilité de C n'est estimée qu'avec une précision deux fois moindre que dans l'arrangement défini en 2.3.1

2.3.3 partially nested experiment: A nested experiment in which several factors may be crossed as in factorial experiments and other factors nested within the crossed combinations.

NOTE — It is not unusual to find that experiments consist of both factorial and nested segments. See *nested experiment* (2.3).

2.3.3 expérience partiellement emboîtée: Expérience emboîtée dans laquelle certains facteurs sont croisés comme dans une expérience factorielle, les autres facteurs étant emboîtés à l'intérieur des combinaisons croisées.

NOTE — Il n'est pas rare de rencontrer des expériences comportant à la fois des éléments factoriels et des éléments emboîtés (voir 2.3 *expérience emboîtée, expérience hiérarchisée*).

3 Methods of analysis

3.1 method of least squares: A technique of estimation of a parameter which minimizes Σe^2, where e is the difference between the observed value and the predicted value derived from the assumed model.

NOTE — The experimental errors associated with the individual observations ordinarily are assumed to be independent, although the method may be generalized to the case of correlated errors. The usual analysis of variance, regression analysis and contrast analysis are all based on the method of least squares and provide different computational and interpretative advantages stemming from certain balances within the experimental arrangements which permit convenient groupings of the data.

3.2 analysis of variance (ANOVA): A technique which subdivides the total variation of a set of data into meaningful component parts associated with specific sources of variation for the purpose of testing some hypothesis on the parameters of the model or estimating variance components.

An analysis of variance table usually contains columns for

— source of variation (first column);

— sum of squares (S.S.) (second column);

— degrees of freedom (analogous to the denominator $n - 1$ in the definition of sample variance s^2) (D.F.) (third column);

— mean square (the sum of squares divided by the degrees of freedom) (M.S.) (fourth column).

Another column, "expected mean square E[M.S.]", may often be added to serve as a guide showing which mean squares under the assumed model are to be compared in an F test. When the levels (versions) are selected at random, the expected mean squares show the composition of the "components of variance" assignable to the appropriate sources. See *model 2 analysis of variance* (3.2.2).

3 Méthodes d'analyse

3.1 méthode des moindres carrés: Technique d'estimation d'un paramètre qui minimise Σe^2, où e est la différence entre la valeur observée et la valeur prévue par le modèle théorique.

NOTE — On admet généralement que les erreurs expérimentales associées aux observations individuelles sont indépendantes, bien que la méthode des moindres carrés puisse être généralisée à des erreurs corrélées. Les analyses usuelles de variance, de régression et de contrastes sont toutes basées sur la méthode des moindres carrés; elles présentent différents avantages de calcul et d'interprétation liés à certains équilibres dans les dispositifs expérimentaux permettant des groupements adéquats de données.

3.2 analyse de variance (abréviation anglaise **ANOVA**): Technique consistant à séparer la variation totale d'un ensemble de données en composantes raisonnées associées à des sources spécifiques de variation dans le but de tester certaines hypothèses concernant les paramètres du modèle, ou d'estimer les composantes de la variance.

Un tableau d'analyse de variance est généralement présenté en colonnes qui correspondent

— à l'origine de la variation (première colonne);

— à la somme des carrés (S.C.) (deuxième colonne);

— au nombre de degrés de liberté (analogue au dénominateur $n - 1$ dans la définition de la variance s^2 d'un échantillon) (D.L.) (troisième colonne);

— au carré moyen (somme des carrés divisée par le nombre de degrés de liberté) (C.M.) (quatrième colonne).

Une dernière colonne «espérance mathématique du carré moyen E[C.M.]» peut souvent être ajoutée, afin de faire apparaître quels sont les carrés moyens associés au modèle théorique qui doivent être comparés par un test F. Lorsque les variantes (niveaux) sont choisies aléatoirement, les espérances des carrés moyens indiquent les «composantes de la variance» assignables aux différentes sources de variation (voir 3.2.2 *analyse de variance de modèle 2*).

Example

In a randomized block design the observation obtained from the ith of t treatments in the jth of r blocks is denoted by Y_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Then the following ANOVA table is computed:

Exemple

Dans un plan en blocs randomisés, le résultat obtenu pour le $i^{\text{ème}}$ des t traitements dans le $j^{\text{ème}}$ des r blocs est noté Y_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Le tableau d'analyse de variance se présente de la façon suivante:

Analysis of variance (ANOVA) table
Tableau d'analyse de variance

Source Origine de la variation	Sum of squares (S.S.) Sommes des carrés (S.C.)	Degrees of freedom (D.F.) Degré de liberté (D.L.)	Mean square (M.S.) Carré moyen (C.M.)	F	Expected mean square (E[M.S.]) Espérance mathématique du carré moyen (E[M.S.])
Total	$S_T = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - Y_{..})^2$	$\nu_T = rt - 1$	—	—	—
Treatment Traitement	$S_A = r\sum_i (Y_{ij} - Y_{i.})^2$	$\nu_A = t - 1$	$MS_A = \frac{S_A}{\nu_A}$ $CM_A = \frac{S_A}{\nu_A}$	$F(\nu_A, \nu_e) = \frac{MS_A}{MS_e}$ $F(\nu_A, \nu_e) = \frac{CM_A}{CM_e}$	$\sigma^2 + rK_A^2$
Block Bloc	$S_B = t\sum_j (Y_{ij} - Y_{.j})^2$	$\nu_B = r - 1$	$MS_B = \frac{S_B}{\nu_B}$ $CM_B = \frac{S_B}{\nu_B}$	$F(\nu_B, \nu_e) = \frac{MS_B}{MS_e}$ $F(\nu_B, \nu_e) = \frac{CM_B}{MS_e}$	$\sigma^2 + tK_B^2$
Error Erreur	$S_e = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - Y_{i.} - Y_{.j} + Y_{..})^2$	$\nu_e = (t-1)(r-1)$	$MS_e = \frac{S_e}{\nu_e}$ $CM_e = \frac{S_e}{\nu_e}$	— —	σ^2

In the ANOVA table

$$S_T = S_A + S_B + S_e$$

$$\nu_T = \nu_A + \nu_B + \nu_e$$

$F(\nu_1, \nu_2)$ is the F-statistic.

The model associated with the observations is given as

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}; \quad i = 1, 2, \ldots, t; \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

with

$$\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j = 0; \; e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$K_A^2 = \frac{\Sigma\alpha_i^2}{(t-1)}; \; K_B^2 = \frac{\Sigma\beta_j^2}{(r-1)}$$

where

μ is the general mean;

α_i is the effect of the ith treatment;

β_j is the effect of jth block;

e_{ij} is the experimental error.

For this example, it is assumed that selected (fixed) levels are designated.

Dans ce tableau:

$$S_T = S_A + S_B + S_e$$

$$\nu_T = \nu_A + \nu_B + \nu_e$$

$F(\nu_1, \nu_2)$ est la statistique F à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.

Le modèle associé aux observations est

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}; \quad i = 1, 2, \ldots, t; \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

avec

$$\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j = 0; \; e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$K_A^2 = \frac{\Sigma\alpha_i^2}{(t-1)}; \; K_B^2 = \frac{\Sigma\beta_j^2}{(r-1)}$$

où

μ est la moyenne générale;

α_i est l'effet du $i^{\text{ème}}$ traitement;

β_j est l'effet du $j^{\text{ème}}$ bloc;

e_{ij} est l'erreur expérimentale.

Dans cet exemple, les niveaux choisis des facteurs sont supposés planifiés.

The least square estimates of μ, α_i, β_j and σ^2 are obtained by

$$\hat{\mu} = Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij}/rt$$

$$\hat{\alpha}_i = Y_{i.} - Y_{..} = \sum_j Y_{.j}/r$$

$$\hat{\beta}_j = Y_{.j} - Y_{..} = \sum_i Y_{i.}/t$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_i \sum_j \frac{(Y_{ij} - Y_{i.} - Y_{.j} + Y_{..})^2}{[(t-1)(r-1)]} = s_e^2$$

Traditionally, X has been used to represent the response value in analysis variance computations while Y is used in regression analysis and contrast analysis. Many newer text books are now using Y. The simple formulas shown in the example depend upon having equal numbers of observations in the cells of the randomized block design.

NOTE — Basic assumptions are that the effects due to all the sources of variation are additive and that the experimental errors are independently and normally distributed with zero mean and have equal variances (homoscedasticity) throughout all subdivisions of the data. The technique, in conjunction with the F ratio, is used to provide a test of significance for the effects of these sources of variation and/or to obtain estimates of the variances attributable to these sources. The assumption of a normal distribution is required only for this test of significance and confidence intervals. Averages and interactions are usually looked at by summarizing in 2-way (or k-way) tables. This example assumes a model 1 (fixed model) (see 3.2.1). When the assumption of normal distributions of error cannot be made, it is sometimes possible to use transformations (e.g. logarithms).

3.2.1 model 1 analysis of variance (fixed model): An analysis of variance in which the levels (versions) of all factors are fixed rather than random selections over the range of versions to be studied for those factors.

NOTE — With fixed levels, it is inappropriate to compute components of variance.

3.2.2 model 2 analysis of variance (random model): An analysis of variance in which the levels (versions) of all factors are assumed to be selected at random from the distribution of versions to be studied for those factors.

NOTE — With random levels, the primary interest is usually in obtaining components of variance estimates and it is inappropriate to compute estimates of the effects of the selected factor levels.

3.2.3 mixed model analysis of variance: An analysis of variance in which the levels (versions) of some factors are fixed, but for other factors they are selected at random.

NOTE — Components of variance are meaningful only for the random level factors and their interactions with "fixed-effect" factors.

Les estimations des moindres carrés de μ, α_i, β_j et σ^2 sont obtenues par

$$\hat{\mu} = Y_{..} = \sum_i \sum_j Y_{ij}/rt$$

$$\hat{\alpha}_i = Y_{i.} - Y_{..} = \sum_j Y_{.j}/r$$

$$\hat{\beta}_j = Y_{.j} - Y_{..} = \sum_i Y_{i.}/t$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_i \sum_j \frac{(Y_{ij} - Y_{i.} - Y_{.j} + Y_{..})^2}{[(t-1)(r-1)]} = s_e^2$$

Traditionnellement la lettre X était utilisée pour représenter la valeur de la réponse dans les calculs d'analyse de variance, la lettre Y étant utilisée en analyse de régression et en analyse de contraste. Cependant de nombreux ouvrages récents utilisent uniformément la lettre Y. Les formules figurant dans l'exemple sont simples, parce que dans un plan en blocs randomisés, chaque cellule contient le même nombre d'observations.

NOTE — Les hypothèses de base sont que les effets dus à toutes les sources de variation sont additifs et que les erreurs expérimentales sont distribuées indépendamment selon une loi normale de moyenne nulle, avec une même variance (homoscédaticité) dans toutes les combinaisons de données. Cette technique est utilisée, conjointement avec la statistique F, pour tester la signification des effets des sources de variation et/ou pour obtenir des estimations des variances attribuables à ces sources. L'hypothèse de normalité n'est nécessaire que pour les tests de signification et le calcul d'intervalles de confiance. Moyennes et interactions sont généralement présentées, sous forme résumée, dans une table à deux entrées (ou à k entrées). Cet exemple correspond au modèle 1 (modèle à effets fixes) (voir 3.2.1). Lorsqu'on ne peut pas faire l'hypothèse de normalité de l'erreur, il est quelquefois possible d'utiliser une transformation (par exemple les logarithmes).

3.2.1 analyse de variance de modèle 1 (modèle à effets fixés): Analyse de variance dans laquelle les variantes (niveaux) de tous les facteurs sont fixées, et non choisies aléatoirement, dans l'étude des niveaux que l'on se propose d'étudier pour ces facteurs.

NOTE — Lorsque les niveaux sont ainsi fixés, le calcul de composantes de la variance n'a pas de signification.

3.2.2 analyse de variance de modèle 2 (modèle aléatoire): Analyse de variance dans laquelle les variantes (niveaux) de tous les facteurs sont supposées avoir été choisies aléatoirement dans la distribution des variantes que l'on se propose d'étudier pour ces facteurs.

NOTE — Dans le cas de niveaux aléatoires, l'intérêt principal est généralement d'obtenir des estimations des composantes de la variance; le calcul de l'estimation des effets aux différents niveaux des facteurs est dépourvu de signification.

3.2.3 modèle mixte d'analyse de variance: Analyse de variance dans laquelle les variantes (niveaux) de certains facteurs sont fixées, tandis que les autres facteurs sont choisis aléatoirement.

NOTE — Les composantes de variance n'ont de signification que pour les facteurs à niveau aléatoire et leurs interactions avec les facteurs à effet fixé.