NORME INTERNATIONALE
INTERNATIONAL STANDARD

CEI
IEC
1165

Première édition
First edition
1995-01

Application des techniques de Markov

Application of Markov techniques

Numéro de référence
Reference number
CEI/IEC 1165: 1995

Numéros des publications

Depuis le 1er janvier 1997, les publications de la CEI sont numérotées à partir de 60000.

Publications consolidées

Les versions consolidées de certaines publications de la CEI incorporant les amendements sont disponibles. Par exemple, les numéros d'édition 1.0, 1.1 et 1.2 indiquent respectivement la publication de base, la publication de base incorporant l'amendement 1, et la publication de base incorporant les amendements 1 et 2.

Validité de la présente publication

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu par la CEI afin qu'il reflète l'état actuel de la technique.

Des renseignements relatifs à la date de reconfirmation de la publication sont disponibles dans le Catalogue de la CEI.

Les renseignements relatifs à des questions à l'étude et des travaux en cours entrepris par le comité technique qui a établi cette publication, ainsi que la liste des publications établies, se trouvent dans les documents ci-dessous:

- **«Site web» de la CEI***
- **Catalogue des publications de la CEI**
  Publié annuellement et mis à jour régulièrement (Catalogue en ligne)*
- **Bulletin de la CEI**
  Disponible à la fois au «site web» de la CEI* et comme périodique imprimé

Terminologie, symboles graphiques et littéraux

En ce qui concerne la terminologie générale, le lecteur se reportera à la CEI 60050: *Vocabulaire Electrotechnique International* (VEI).

Pour les symboles graphiques, les symboles littéraux et les signes d'usage général approuvés par la CEI, le lecteur consultera la CEI 60027: *Symboles littéraux à utiliser en électrotechnique,* la CEI 60417: *Symboles graphiques utilisables sur le matériel. Index, relevé et compilation des feuilles individuelles,* et la CEI 60617: *Symboles graphiques pour schémas.*

* Voir adresse «site web» sur la page de titre.

Numbering

As from 1 January 1997 all IEC publications are issued with a designation in the 60000 series.

Consolidated publications

Consolidated versions of some IEC publications including amendments are available. For example, edition numbers 1.0, 1.1 and 1.2 refer, respectively, to the base publication, the base publication incorporating amendment 1 and the base publication incorporating amendments 1 and 2.

Validity of this publication

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC, thus ensuring that the content reflects current technology.

Information relating to the date of the reconfirmation of the publication is available in the IEC catalogue.

Information on the subjects under consideration and work in progress undertaken by the technical committee which has prepared this publication, as well as the list of publications issued, is to be found at the following IEC sources:

- **IEC web site***
- **Catalogue of IEC publications**
  Published yearly with regular updates (On-line catalogue)*
- **IEC Bulletin**
  Available both at the IEC web site* and as a printed periodical

Terminology, graphical and letter symbols

For general terminology, readers are referred to IEC 60050: *International Electrotechnical Vocabulary* (IEV).

For graphical symbols, and letter symbols and signs approved by the IEC for general use, readers are referred to publications IEC 60027: *Letter symbols to be used in electrical technology*, IEC 60417: *Graphical symbols for use on equipment. Index, survey and compilation of the single sheets* and IEC 60617: *Graphical symbols for diagrams.*

* See web site address on title page.

NORME INTERNATIONALE
INTERNATIONAL STANDARD

CEI
IEC
1165

Première édition
First edition
1995-01

Application des techniques de Markov

Application of Markov techniques

Bureau Central de la Commission Electrotechnique Internationale 3, rue de Varembé Genève, Suisse

Commission Electrotechnique Internationale
International Electrotechnical Commission
Международная Электротехническая Комиссия

CODE PRIX
PRICE CODE S

Pour prix, voir catalogue en vigueur
For price, see current catalogue

SOMMAIRE

CONTENTS

COMMISSION ELECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

APPLICATION DES TECHNIQUES DE MARKOV

AVANT-PROPOS

1) La CEI (Commission Electrotechnique Internationale) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de la CEI). La CEI a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, la CEI, entre autres activités, publie des Normes internationales. Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec la CEI, participent également aux travaux. La CEI collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.

2) Les décisions ou accords officiels de la CEI en ce qui concerne les questions techniques, préparés par les comités d'études où sont représentés tous les Comités nationaux s'intéressant à ces questions, expriment dans la plus grande mesure possible un accord international sur les sujets examinés.

3) Ces décisions constituent des recommandations internationales publiées sous forme de normes, de rapports techniques ou de guides et agréées comme telles par les Comités nationaux.

4) Dans le but d'encourager l'unification internationale, les Comités nationaux de la CEI s'engagent à appliquer de façon transparente, dans toute la mesure possible, les Normes internationales de la CEI dans leurs normes nationales et régionales. Toute divergence entre la norme de la CEI et la norme nationale ou régionale correspondante doit être indiquée en termes clairs dans cette dernière.

La Norme internationale CEI 1165 a été établie par le Comité d'Etudes 56 de la CEI: Sûreté de fonctionnement.

Le texte de cette section est issu des documents suivants:

Règle des Six Mois	Rapport de vote
56(BC)164	56(BC)176

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette section.

Les annexes A, B et C sont données uniquement à titre d'information.

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

APPLICATION OF MARKOV TECHNIQUES

FOREWORD

1) The IEC (International Electrotechnical Commission) is a world-wide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of the IEC is to promote international cooperation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, the IEC publishes International Standards. Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. The IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.

2) The formal decisions or agreements of the IEC on technical matters, prepared by technical committees on which all the National Committees having a special interest therein are represented, express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the subjects dealt with.

3) They have the form of recommendations for international use published in the form of standards, technical reports or guides and they are accepted by the National Committees in that sense.

4) In order to promote international unification, IEC National Committees undertake to apply IEC International Standards transparently to the maximum extent possible in their national and regional standards. Any divergence between the IEC Standard and the corresponding national or regional standard shall be clearly indicated in the latter.

International Standard IEC 1165 has been prepared by IEC Technical Committee 56: Dependability.

The text of this standard is based on the following documents:

Six Months' Rule	Report on voting
56(CO)164	56(CO)176

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

Annexes A, B and C are for information only.

INTRODUCTION

Plusieurs méthodes analytiques différentes sont disponibles pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement. L'analyse de Markov est l'une de ces méthodes.

La CEI 300-3-1 donne une vue d'ensemble des méthodes disponibles et de leurs caractéristiques.

Il convient que l'analyste examine les mérites respectifs de ces méthodes diverses ainsi que la possibilité de les appliquer seules ou combinées avant de décider de l'utilisation de l'analyse de Markov. Il convient, pour chaque méthode, de tenir compte des résultats obtenus, des données requises pour effectuer l'analyse, de la complexité de cette analyse ainsi que d'autres facteurs identifiés.

INTRODUCTION

Several distinct analytical methods of dependability analysis are available, of which Markov analysis is one.

IEC 300-3-1 gives an overview of available methods and their general characteristics.

The relative merits of various methods and their individual or combined applicability in evaluating the dependability of a given system or component, should be examined by the analyst prior to deciding on the use of Markov analysis. For each method, consideration should also be given to the results produced, the data required to perform the analysis, the complexity of analysis, and other identified factors.

APPLICATION DES TECHNIQUES DE MARKOV

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale fournit un guide pour l'application des techniques de Markov à l'analyse de la sûreté de fonctionnement.

2 Références normatives

Les documents normatifs suivants contiennent des dispositions qui, par suite de la référence qui y est faite, constituent des dispositions valables pour la présente Norme Internationale. Au moment de la publication, les éditions indiquées étaient en vigueur. Tout document normatif est sujet à révision et les parties prenantes aux accords fondés sur la présente Norme Internationale sont invitées à rechercher la possibilité d'appliquer l'édition la plus récente des documents normatifs indiqués ci-après. Les membres de la CEI et de l'ISO possèdent le registre des normes internationales en vigueur.

CEI 50(191): 1990, *Vocabulaire Electrotechnique International (VEI) – Chapitre 191: Sûreté de fonctionnement et qualité de service*

CEI 1078: 1991, *Techniques d'analyse de la sûreté de fonctionnement – Méthode du diagramme de fiabilité*

3 Définitions

Les termes et définitions de la CEI 50(191) s'appliquent pour les besoins de la présente norme internationale. De plus, les termes et définitions suivants sont utilisés:

3.1 **unité**: Composant ou ensemble de composants qui fonctionne comme une entité unique.

NOTE - En tant que telle, une unité peut avoir seulement deux états: fonctionnel ou de défaillance (voir 3.3 et 3.4). Par commodité le terme état unité sera utilisé pour désigner l'état d'une unité.

3.2 **état du système**: Etat d'un système est une combinaison particulière des états des unités qui le composent.

NOTE - Plusieurs états du système peuvent être combinés pour définir un seul état.

3.3 **état fonctionnel**: Etat d'un système (ou d'une unité) dans lequel le système (ou l'unité) accomplit la fonction requise.

3.4 **état de défaillance**: Etat d'un système (ou d'une unité) dans lequel le système (ou l'unité) n'accomplit pas la fonction requise.

NOTE - Un système peut avoir plusieurs états de défaillance distincts.

3.5 **transition**: Passage d'un état à un autre état, habituellement consécutif à une défaillance ou un rétablissement.

NOTE - Une transition peut également avoir pour cause d'autres événements tels que les erreurs humaines, les événements extérieurs, une reconfiguration de logiciel, etc.

3.6 **probabilité de transition**: Probabilité de transition d'un état à un autre état.

3.7 **état initial**: Etat du système à l'instant $t = 0$.

NOTE - A la suite de la défaillance d'un système, celui-ci peut être rétabli dans son état initial. Généralement, un système entre en exploitation à l'intant $t = 0$ dans un état où il est complètement fonctionnel, c'est-à-dire dans lequel toutes les unités du système fonctionnent, puis il évolue dans un état final, qui est un état de défaillance, en passant par d'autres états fonctionnels du système dans lesquels on trouve progressivement de moins en moins d'unités en état fonctionnel.

APPLICATION OF MARKOV TECHNIQUES

1 Scope

This International Standard provides guidance on the application of Markov techniques to dependability analysis.

2 Normative references

The following normative documents contain provisions which, through reference in this text, constitute provisions of this standard. At the time of publication, the editions indicated were valid. All normative documents are subject to revision, and parties to agreements based on this standard are encouraged to investigate the possibility of applying the most recent editions of the normative documents indicated below. Members of IEC and ISO maintain registers of currently valid International Standards.

IEC 50(191): 1990, *International Electrotechnical Vocabulary (IEV), chapter 191: Dependability and quality of service*

IEC 1078: 1991, *Analysis techniques for dependability – Reliability block diagram method*

3 Definitions

For the purpose of this International Standard the terms and definitions of IEC (50)191 apply. In addition, the following terms and definitions are used:

3.1 **unit**: A component or set of components, which function as a single entity.

NOTE - As such, the unit can exist in only two states: functional or failed (see 3.3 and 3.4). For convenience, the term **unit state** will be used to denote the state of a unit.

3.2 **system state**: A system state is a particular combination of unit states.

NOTE - Several system states may be combined into one state.

3.3 **functional state**: A system (or unit) state in which the system (or unit) performs the required function.

3.4 **failed state**: A system (or unit) state in which the system (or unit) does not perform the required function.

NOTE - A system can have several distinguishable failed states.

3.5 **transition:** A change from one state to another, usually as a result of failure or restoration.

NOTE - A transition may be also caused by other events such as human errors, external events, reconfiguration of software, etc.

3.6 **transition probability**: The probability of transition between one state and another state.

3.7 **initial state**: The system state at time $t = 0$.

NOTE - Following a system failure, the system may be restored to the initial state. Generally, a system starts its operation at $t = 0$ from the complete functional state in which all units of the system are functioning and transits towards the final system state, which is a failed state, via other system functional states having progressively fewer functioning units.

3.8 **état absorbant**: Etat à partir duquel, dès lors que le système s'y trouve, les transitions ne sont plus possibles.

NOTE - Dès lors qu'il se trouve dans un état absorbant, le système restera dans cet état jusqu'à ce qu'il soit effectivement remplacé, dans son intégralité, par un système totalement fonctionnel.

3.9 **système apte au rétablissement**: Système composé d'unités qui peuvent être défaillantes et être rétablies dans leur état fonctionnel sans être nécessairement la cause de la défaillance du système.

NOTES

1 Ceci correspond dans le graphe d'état à des transitions vers l'état initial. Pour que ces transitions soient possibles, les unités concernées doivent nécessairement être exploitées dans des configurations redondantes.

2 Pour un système apte au rétablissement, des mesures de la sûreté de fonctionnement telles que fiabilité, MTTFF et disponibilité sont calculées.

3.10 **système non apte au rétablissement**: Système dont le graphe de Markov contient seulement des transitions vers l'état de défaillance final.

NOTE - Pour un système non apte au rétablissement, des mesures de la sûreté de fonctionnement telles que fiabilité, MTTF sont calculées.

4 Symboles et abréviations

4.1 *Symboles utilisés dans les graphes de Markov*

4.1.1 **symbole d'état:** Un état est représenté par un cercle ou un rectangle.

4.1.2 **description de l'état:** La description de l'état est placée à l'intérieur du symbole d'état et peut se présenter sous la forme de mots ou de caractères alphanumériques définissant les combinaisons d'unités défaillantes et fonctionnelles qui caractérisent l'état.

4.1.3 **repère d'état:** Nombre inscrit à l'intérieur d'un cercle adjacent au symbole d'état, ou bien, en l'absence de description de l'état, à l'intérieur même du symbole d'état.

NOTE - L'état peut souvent être représenté de façon adéquate par un cercle avec le repère d'état.

4.1.4 **flèche de transition:** La flèche de transition indique le sens d'une transition (en conséquence d'une défaillance ou d'un rétablissement).

4.1.5 **taux:** Les taux de rétablissement et/ou les taux de défaillance sont écrits sur la flèche de transition.

4.2 *Symboles utilisés pour les mesures de la sûreté de fonctionnement*

Les symboles des mesures de la sûreté de fonctionnement sont ceux de la CEI 50(191), lorsqu'ils s'y trouvent. Dans la présente norme, les symboles suivants sont utilisés:

Symbole/abréviation	*Terme*	*CEI 50(191) N°*
$R(t)$	fiabilité	
	NOTE - Le 191-12-01 emploie le symbole général $R(t_1, t_2)$	
MTTF	durée moyenne de fonctionnement avant défaillance	191-12-07
MTTFF	durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance	191-12-06
MTBF	moyenne des temps de bon fonctionnement	191-12-09
MTTR	durée moyenne de panne	191-13-08
$\lambda(t)$	taux de défaillance	191-12-02
$\mu(t)$	taux de rétablissement	
	NOTE - Le 191-13-02 emploie le symbole $\mu(t)$ pour désigner le taux instantané de réparation	

3.8 **absorbing state:** A state from which, once entered, transitions are not possible.

NOTE - Once in an absorbing state, the system will stay there until in effect it is replaced, in its entirety, by a fully functional system.

3.9 **restorable system:** A system containing units which can fail and then be restored to their functional state, without necessarily causing system failure.

NOTES

1 This corresponds to transitions in the state diagram in the direction towards the initial state. For this to be possible, the units concerned will invariably operate in redundant configurations.

2 For a restorable system, dependability measures such as reliability, MTTFF, and availability are calculated.

3.10 **non-restorable system:** A system, the state transition diagram of which contains only transitions in the direction towards the final system failure state.

NOTE - For a non-restorable system, reliability measures such as reliability and MTTF are calculated.

4 Symbols and abbreviations

4.1 *Symbols for state-transition diagrams*

4.1.1 **state symbol:** A state is represented by a circle or a rectangle.

4.1.2 **state description:** The state description is placed inside the state symbol and may take the form of words or alphanumeric characters defining those combinations of failed and functioning units which characterise the state.

4.1.3 **state label:** A state label is a number in a circle, placed adjacent to the state symbol, or in the absence of a state description, within the symbol itself.

NOTE - The state can often be adequately represented by a circle with the state number.

4.1.4 **transition arrow:** The transition arrow indicates the direction of a transition (as a result of failure or restoration).

4.1.5 **rates:** Restoration rates and/or failure rates are written on the transition arrow.

4.2 *Other symbols and abbreviations*

Symbols for dependability measures follow those of IEC 50(191), where available. In this standard, the following symbols are used:

Symbol/abbreviation	*Term*	*IEC 50(191) No*
$R(t)$	reliability	
	NOTE - 191-12-01 uses the general symbol $R(t_1, t_2)$	
MTTF	mean time to failure	191-12-07
MTTFF	mean time to first failure	191-12-06
MTBF	mean operating time between failures	191-12-09
MTTR	mean time to restoration	191-13-08
$\lambda(t)$	failure rate	191-12-02
$\mu(t)$	restoration rate	

NOTE - 191-13-02 uses μ (t) for repair rate

$A(t)$	disponibilité instantanée	191-11-01
$A(\infty)$	disponibilité asymptotique NOTE - Le 191-11-05 emploie le symbole A pour la disponibilté asymptotique	
MUT	temps moyen de disponibilité	191-11-11
MDT	temps moyen d'indisponibilité	191-11-12
$P_i(t)$	probabilité de trouver le système dans l'état "i" à l'instant t	
$\Delta\ t$	petit intervalle de temps	

4.3 *Exemple*

Un exemple de graphe de Markov applicable à un système composé d'une seule unité est présenté figure 1.

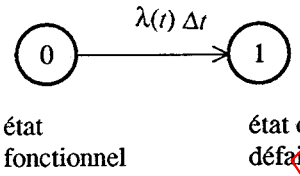


Figure 1 – Graphe de Markov d'un système non apte au rétablissement composé d'une seule unité

$\lambda(t)\Delta\ t$ est la probabilité de passage de l'état 0 à l'état 1 dans le petit intervalle de temps Δt. Habituellement toutefois, $\lambda(t)\Delta t$ est remplacé simplement par λ. La raison en est que, dans cette norme, $\lambda(t)$ est constant en fonction du temps (voir article 6) et les flèches de transition sont par convention libellées en utilisant les taux de transition plutôt que les possibilités de transition. En conséquence, le graphe de la figure 1 est fréquemment dessiné sous la forme présentée en figure 2.

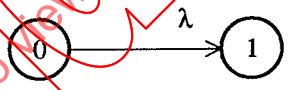


Figure 2 – Graphe de Markov simplifié d'un système non apte au rétablissement composé d'une seule unité

5 Généralités

Une analyse de Markov utilise un graphe de Markov, c'est-à-dire une représentation sous la forme d'un dessin de la performance de sûreté de fonctionnement d'un système. Un tel graphe modélise les aspects de sûreté de fonctionnement du comportement du système au cours du temps. Dans la présente norme, un système est considéré comme un certain nombre d'unités, chacune d'entre elles pouvant prendre seulement deux états: défaillant ou fonctionnel. Le système dans sa globalité, toutefois, peut prendre plusieurs états différents, chacun étant déterminé par une combinaison particulière d'unités défaillantes et fonctionnelles. En conséquence, lors de la défaillance ou de la réparation d'une unité, le système passe d'un état à un autre. Ce type de modèle est généralement désigné par les termes état discret, modèle temporel permanent. Toutefois, en raison de la présentation du modèle, la méthodologie correspondante est également un cas particulier d'analyse de l'espace des états.

L'analyse de l'espace des états est particulièrement adaptée à l'évaluation de la sûreté de fonctionnement de systèmes incorporant des redondances, ou à des systèmes pour lesquels la défaillance dépend d'événements séquentiels, ou pour des systèmes pour lesquels les stratégies de maintenance sont complexes, par exemple rétablissement prioritaire, problèmes de files d'attente et de ressources restreintes. Il convient que l'analyste s'assure que le modèle reflète de façon adéquate l'exploitation véritable du système en tenant compte des stratégies et politiques de maintenance.

$A(t)$	instantaneous availability	191-11-01
$A(\infty)$	asymptotic availability NOTE - 191-11-05 uses A for asymptotic availability	
MUT	mean up time	191-11-11
MDT	mean down time	191-11-12
$P_i(t)$	probability of finding the system in state "i" at time t	
Δt	a small time interval	

4.3 *Example*

An example of a state-transition diagram, applicable to a one-unit system, is shown in figure 1.

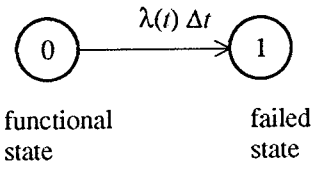


Figure 1 – State-transition diagram of a non-restorable one-unit system

$\lambda(t)\Delta t$ is the probability of a transition between states 0 and 1 in the small time interval Δt. Usually however, terms like $\lambda(t)\Delta t$ are replaced simply by λ. The reason for this is that in this standard $\lambda(t)$ is constant with respect to time (see clause 6) and transition arrows are, by convention, labelled using transition rates rather than transition probabilities. Hence the diagram in figure 1 is frequently drawn in the form shown in figure 2.

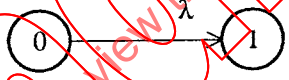


Figure 2 – State-transition diagram (simplified) of a non-restorable one-unit system

5 General

A Markov analysis makes use of a state-transition diagram which is a pictorial representation of the dependability performance of a system. It models the dependability aspects of the system's behaviour with time. In this standard, a system is regarded as a number of units, each of which can exist in only one of two states: failed or functional. The system as a whole, however, can exist in many different states, each being determined by the particular combination of failed and functioning units. Thus, as a unit fails or is repaired, the system "moves" from one state to the next. This kind of model is generally called a discrete-state, continuous time model. However, because of the way in which the model is presented, the associated methodology is also a special type of "state space" analysis.

State space analysis is especially suited to the dependability assessment of systems with redundancy, or to systems where system failure depends on sequential events, or to systems for which the maintenance strategies are complex, for example priority restoration, queuing problems, and resource restrictions. The analyst should ensure that the model adequately reflects the operation of the real system with respect to maintenance strategies and policies.

Pourvu que les limitations décrites dans l'article 6 (ci-dessus) soient acceptables, l'un des avantages majeurs des méthodes de l'analyse de Markov est que les stratégies de maintenance, par exemple les priorités de rétablissement, peuvent être modélisées facilement. De plus l'ordre dans lequel des défaillances multiples apparaissent peut être représenté dans le modèle. Il convient de noter que d'autres techniques d'analyse de la sûreté de fonctionnement, par exemple l'analyse par arbre de panne et la méthode du diagramme de fiabilité, ne permettent pas de prendre en compte des stratégies de maintenance complexes.

Bien que l'analyse de l'espace des états soit, d'un point de vue théorique, caractérisée par sa souplesse d'emploi et son adaptabilité, il est nécessaire de prendre des précautions spéciales pour traiter les difficultés rencontrées dans la pratique. Le problème principal réside dans le fait que le nombre des états du système ainsi que les possibilités de transition s'accroissent rapidement en fonction du nombre d'unités présentes dans le système. Il est vraisemblable qu'il y aura d'autant plus d'erreurs et de représentations fausses que le nombre d'états et de transitions sera plus grand. Afin de réduire ce risque, il est conseillé de suivre certaines règles lors de la conception d'un graphe de Markov. Les techniques numériques utilisées pour le calcul du graphe peuvent également s'avérer complexes et nécessiter l'utilisation de programmes informatiques spéciaux et/ou le recours à des experts en mathématiques appliquées.

Les méthodes de l'analyse de Markov ne sont pas seulement adaptées à la modélisation de stratégies de maintenance mais elles conviennent également à la modélisation sous la forme de graphiques, ce qui est en soi une caractéristique précieuse. Le mécanisme de défaillance/rétablissement est représenté par des transitions d'un symbole d'état vers un autre symbole du graphe, l'ensemble constituant le graphe de Markov du système. La somme de toutes les probabilités d'état est 1, ce qui signifie qu'à chaque instant le système doit être représenté par un – et un seul – des états du graphe de Markov. Si, pour des raisons pratiques les états ayant une faible probabilité sont omis, la condition ci-dessus est remplie de façon approximative seulement.

Les techniques de modélisation décrites dans le présent document peuvent aussi bien s'appliquer à des systèmes pour lesquels tout ou partie des unités qui le composent ne sont pas aptes au rétablissement. Il convient de noter qu'un système composé d'unités non aptes au rétablissement peut être considéré comme un cas particulier d'un système composé d'unités aptes au rétablissement, les temps de rétablissement étant infinis.

6 Hypothèses

Les règles d'élaboration d'un graphe de Markov spécifiées dans le présent document s'appliquent en général. Toutefois, la description des techniques numériques s'applique seulement lorsque les taux de défaillance et de rétablissement sont constants en fonction du temps pour toutes les unités qui composent le système analysé. L'hypothèse du taux de défaillance constant est raisonnablement acceptable pour les composants de nombreux systèmes, mais il convient de vérifier l'hypothèse du taux de rétablissement constant sauf si la moyenne des temps de rétablissement est faible en regard des durées moyennes de fonctionnement avant défaillance. Le calcul numérique du cas général où les taux de défaillance ou de rétablissement ne sont pas constants en fonction du temps sont du domaine d'application de la présente norme.

Une difficulté particulière provient de l'hypothèse dont on part pour trouver les solutions mathématiques: à savoir celle qui consiste à supposer que le comportement futur du système dépend seulement de son état présent, et non de la manière par laquelle le système est arrivé dans cet état. L'analyste doit s'assurer que le graphe de Markov est dépourvu de mémoire, même si le système réel a un passé (voir 7.3.2).

On peut résumer comme suit les hypothèses associées aux probabilités de transition:

- les transitions d'état correspondent à des événements statistiquement indépendants;
- le taux de défaillance, λ, et le taux de rétablissement, μ, sont constants;
- les probabilités de transition d'un état à l'autre dans le petit intervalle de temps Δt, sont données par $\lambda\Delta t$ et/ou $\mu\Delta t$.

Provided the limitations described in clause 6 (below) can be accepted, one of the major advantages of Markov analysis methods is that maintenance strategies, for example restoration priorities, can easily be modelled. Moreover, the order in which multiple failures occur can be represented in the model. It should be noted that other dependability analysis techniques, for example fault tree analysis and reliability block diagram methods, do not allow complex maintenance strategies to be taken into account.

Although state space analysis, from a theoretical viewpoint, is flexible and versatile, special precautions are necessary to deal with the difficulties of practical applications. The main problem is that the number of system states and possible transitions increases rapidly with the number of units in the system. The larger the number of states and transitions, the more likely is it that there will be errors and misrepresentations. To reduce this risk, it is advisable that certain rules be followed in designing the diagram. Also, the numerical techniques used for the evaluation of the diagram may be complex and may require special computer programs and/or assistance from experts in applied mathematics.

Not only are Markov analysis methods suited to the modelling of maintenance strategies, but such methods also enable the failure/restoration events to be modelled in a pictorial way, which is in itself a valuable feature. The process of failure/restoration is represented by transitions from one state symbol to another in the array of state symbols which together constitute the system state-transition diagram. The sum of all the state probabilities is unity, that is at any instant in time the system must be represented by one - and only one - of the states in the state-transition diagram. If, for practical reasons, states with low probability are omitted, the above condition is only approximately fulfilled.

The modelling techniques described can also be applied to systems where some or all of the units are not restored. Note that a system with non-restorable units can be regarded as a special case of a system with restorable units where the restoration times are infinite.

6 Assumptions

The rules for generating the state-transition diagram stated in this standard apply generally. However, the description of numerical techniques apply only when the failure rates and restoration rates for all units in the analysed system are constant with respect to time. The assumption of constant failure rate is reasonably acceptable for components in many systems, but the assumption of constant restoration rate should be verified, unless the mean time to restoration of units is small by comparison with the corresponding mean-times-to-failure. Numerical evaluation for the general case, where failure rates or restoration rates are not constant with time, is outside the scope of this standard.

One particular difficulty is created by the assumption used for mathematical solutions: namely that the future behaviour of the system depends only on the present state of the system, and not on the way the system arrived at that state. The analyst shall ensure that the state-transition diagram is memoryless, even if the real system is not (see 7.3.2).

The assumptions associated with transition probability can be summarised as follows:

- state transitions correspond to statistically independent events;
- the failure rate, λ, and the restoration rate, μ, are constant;
- the transition probabilities from one state to another in the time interval Δt, Δt being small, are given by $\lambda\Delta t$ and/or $\mu\Delta t$.

7 Elaboration des graphes de Markov

7.1 *Précautions*

La conception correcte du graphe de Markov est une tâche critique de l'analyse de Markov. Le paragraphe 7.2 donne quelques-unes des règles recommandées. Il convient d'établir ces règles avant d'entreprendre l'analyse et d'identifier précisément chaque état afin de pouvoir construire des modèles graphiques clairs.

7.2 *Règles*

Les règles ci-dessous constituent un guide. D'autres symboles, ou une autre présentation du graphe peuvent être mieux adaptées dans certains cas, par exemple afin d'expliquer des techniques de calcul diverses, ou pour développer des formules mathématiques.

Les règles suivantes sont recommandées:

a) Il convient que chaque état soit identifié par un symbole (cercle ou rectangle), avec l'identification qui permet de rapporter uniquement la procédure analytique à l'état en question. L'identificateur est généralement une lettre ou un nombre.

b) Lorsque cela est nécessaire pour la clarté du graphe de Markov, il est préférable que le symbole comporte une description détaillée de l'état, soit directement, soit en renvoyant à une liste explicative. Si la description est employée, il convient de placer l'identificateur relatif à l'état dans un cercle ou dans un petit rectangle adjacent au symbole d'état.

c) Il convient que les symboles décrivant les états du système soient disposés de telle sorte que le symbole situé le plus à gauche corresponde à l'état de marche complet et que le symbole de droite corresponde à un état de défaillance du système. Il convient que les symboles relatifs aux états intermédiaires soient disposés de sorte que la transition d'un état situé à gauche vers un état situé à droite soit la conséquence d'une défaillance, et que la transition de l'état situé à droite vers l'état situé à gauche soit la conséquence d'un rétablissement. Pour des raisons pratiques, on peut trouver des transitions de la droite vers la gauche lorsque cela n'a pas pour conséquence un accroissement excessif du nombre d'intersections des lignes de transition (voir les figures 13 et 14).

d) Il convient d'aligner verticalement les symboles d'états du système correspondant au même nombre de défaillances.

e) Il convient que les transitions entre états soient repérées par des lignes fléchées reliant les états particuliers. Une ligne dont la flèche est orientée vers la droite représente une défaillance, alors qu'une ligne dont la flèche est dirigée vers la gauche représente un rétablissement. Si une transition entre deux états peut résulter soit d'une défaillance, soit d'un rétablissement, ces états particuliers sont alors reliés par une seule ligne comportant des flèches aux deux extrémités. Dans le cas d'un graphe de Markov simple, il est possible d'utiliser des lignes de transition distinctes pour indiquer les défaillances et les rétablissements.

f) Il convient que les flèches présentes sur les lignes représentant les transitions soient représentées avec la probabilité de la transition correspondante qui leur est associée. Cela peut être réalisé en identifiant les taux correspondants soit directement, soit en renvoyant à une liste.

g) Les lignes de transition dans les graphes d'états relatifs à des systèmes non aptes au rétablissement portent une seule flèche représentant dans ce cas la transition vers une défaillance. Il convient que les systèmes dont toutes les unités sont aptes au rétablissement sans contraintes de maintenance (lorsque le rétablissement d'une unité commence juste après sa défaillance) soient décrits par des graphes dont les lignes de transition comportent des flèches dans les deux sens entre chaque unité. Il convient que les systèmes partiellement aptes au rétablissement composés d'unités pour certaines aptes au rétablissement et pour d'autres non aptes au rétablissement, ou bien que les systèmes à priorités de rétablissement, soient modélisés en utilisant des graphes dont certaines lignes de transition possèdent deux flèches et d'autres une seule flèche. Afin d'améliorer la lecture du graphe, il convient que deux flèches entre des états identiques soient combinées en une seule flèche double chaque fois que cela est possible.

7 Development of state-transition diagrams

7.1 *Precautions*

A critical task in Markov analysis is the proper design of the state-transition diagram. Subclause 7.2 gives some recommended rules. They should be established before the analysis is undertaken and hence should provide for a proper identification of the individual states, thus enabling clear graphical models to be constructed.

7.2 *Rules*

The rules below are given as a guide. Other symbols or diagram arrangements may be more suitable in some instances, for example, for explaining various evaluation techniques, or for developing mathematical formulæ.

The following rules are recommended:

a) Each state should be identified by a symbol (circle or rectangle) with identification which allows the analytical procedure to refer uniquely to that state. The identifier is usually a letter or a number.

b) When necessary for clarity of the state-transition diagram, the symbol should include a clear description of the state, either directly, or by reference to an explanatory list. If a description is used, the identifier for the state should be placed in a circle, or a small rectangle, adjacent to the state symbol.

c) States should be arranged so that the leftmost state is a fully functional state and the state(s) on the right is a failed state of the system. The relative positions of intermediate states should be such that a transition from left to right is a result of a failure, and a transition from right to left is achieved by a repair or restoration. For practical reasons, there may be a transition from the right margin to the left margin where this does not result in an increased number of transition line crossovers (see figures 13 and 14).

d) System states corresponding to the same number of failed units should be aligned vertically.

e) Transitions between states should be marked by lines with arrows interconnecting the particular states. A line with an arrow on the right represents a failure and a line with an arrow on the left represents a restoration. If a transition between two states can be achieved by either a failure or a restoration, then the particular states should be interconnected by a single line with arrows on both ends. On a simple state-transition diagram, separate transition lines may be used to indicate failure and restoration.

f) The arrows on the lines representing transitions should be labelled with the corresponding transition rates. This may be done by indicating the rates either directly, or by reference to a list.

g) Transition lines associated with non-restorable units can have only one arrow, which in that case represents the failure transition. Systems where all units are restorable, and which are without maintenance constraints, that is the restoration starts immediately after failure of a unit, should be depicted by a diagram with transition line arrows from/to each unit. Partially restorable systems containing units, some of which are restorable and others which are not, or systems with restoration priorities, should be modelled using diagrams containing transition lines some of which have two arrows and others only one. To improve the readability of the diagram, two arrows between the same states should be combined into a single, doubleheaded arrow wherever possible.

h) En règle générale, il est préférable que chaque ligne de transition ne relie que deux symboles d'état voisins. Si une défaillance due à une cause commune met simultanément deux ou plusieurs unités hors service, il est possible de sauter un état (voir figure 6).

7.3 *Exemples*

7.3.1 *Système à une unité*

La première étape dans l'application de la technique d'analyse de Markov consiste à définir les états du système. Considérons, à titre d'exemple un système à une unité. Dans le cas le plus simple, le graphe de Markov correspondant comprend seulement deux états: un état fonctionnel, ayant un taux de défaillance λ, et un état de défaillance, ayant un taux de rétablissement μ, ainsi que l'indique la figure 3.

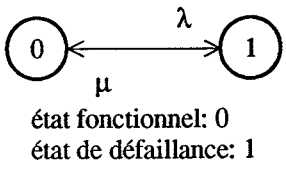


Figure 3 – Graphe de Markov d'un système à une unité apte au rétablissement

La flèche de l'état 0 vers l'état 1 met en évidence l'apparition d'une défaillance avec une probabilité $\lambda\Delta t$ pendant l'intervalle de temps Δt. La flèche de l'état 1 vers l'état 0 indique la réalisation du rétablissement du système avec la probabilité $\mu\Delta t$ pendant l'intervalle de temps Δt.

Un système à une unité peut aussi être modélisé en n'utilisant plus que les deux états 0 (fonctionnel) et 1 (défaillant). Un état dégradé, toujours fonctionnel, peut être inclus dans le graphe. Dans la figure 4 un tel état est repéré 1, l'état de défaillance étant repéré 2.

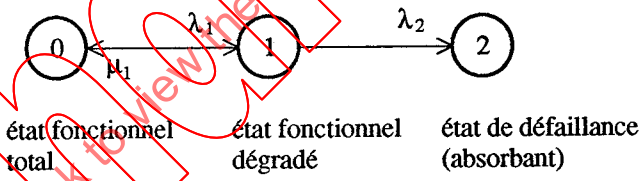


Figure 4 – Graphe de Markov à trois états pour un système à une unité

Si le rétablissement peut être obtenu à partir de l'état 2, le système peut être modélisé par le graphe de la figure 5 dans lequel le taux de rétablissement μ_2 représente la transition de l'état 2 vers l'état 1.

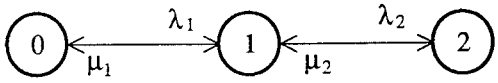


Figure 5 – Graphe de Markov lorsque des réparations peuvent être réalisées à partir de l'état 2

Dans de nombreux cas, un chemin direct de défaillance catalectique de l'état 0 vers l'état 2 doit être considéré, et une flèche affectée d'un taux de défaillance λ_3 est ajoutée à la figure 4, ce qui donne la figure 6. Ce cas est représentatif de la vie humaine, de telle sorte que l'état 0 corresponde à une bonne santé, l'état 1 à la maladie et l'état 2 à la mort.

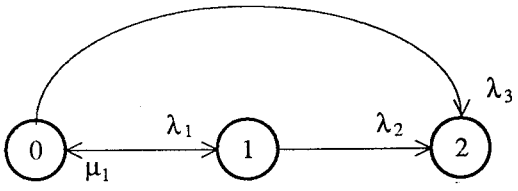


Figure 6 – Graphe de Markov lorsqu'on considère un chemin direct, λ_3

h) Where possible, each transition should link only neighbouring state symbols. If a common cause failure disables simultaneously two or more units, a state may be bypassed (see figure 6).

7.3 *Examples*

7.3.1 *One-unit system*

The first step in applying the Markov Analysis technique is to define the system states. As an example, consider a one-unit system. For the simplest case, the corresponding state-transition diagram comprises only two states: a functional state, with failure rate λ, and a failed state, with restoration rate μ, as shown in figure 3.

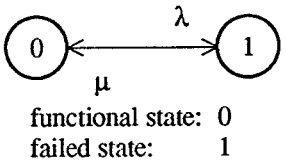


Figure 3 – State-transition diagram for a restorable one-unit system

The arrow from state 0 to state 1 denotes a failure occurrence with the probability $\lambda\Delta t$ during time Δt. The arrow from state 1 to state 0 shows completion of a system restoration with the probability $\mu\Delta t$ during time Δt.

A one-unit system can also be modelled using more than the two states 0 (functional) and 1 (failed). A degraded state which is still a functional state may also be included. Such a state is state 1 in figure 4: the system failure state being state 2.

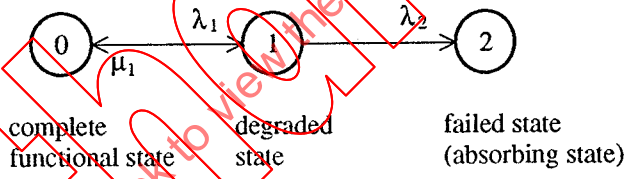


Figure 4 – State-transition diagram with three states for a one-unit system

If restoration can be carried out from state 2, the system can be modelled by the diagram in figure 5, where the restoration rate μ_2 represents the transition from state 2 to state 1.

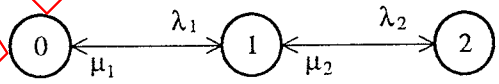


Figure 5 – State-transition diagram when repairs may be made from state 2

In many cases, a direct catastrophic failure path from state 0 to state 2 has to be considered, and an arrow λ_3 is added to figure 4 to give figure 6. This case may represent the life history of human beings, so that state 0 is a healthy state, state 1 is illness and state 2 is death.

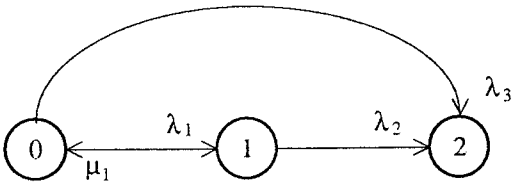


Figure 6 – State-transition diagram when direct path λ_3 is considered

Le modèle décrit en figure 3 peut être utilisé pour obtenir la disponibilité $A(t)$ et la disponibilité asymptotique $A(\infty)$. Si c'est la fiabilité qui est demandée, le graphe de Markov de la figure 7 s'applique. Noter que l'état 1 devient un état absorbant.

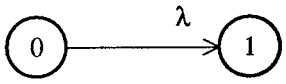
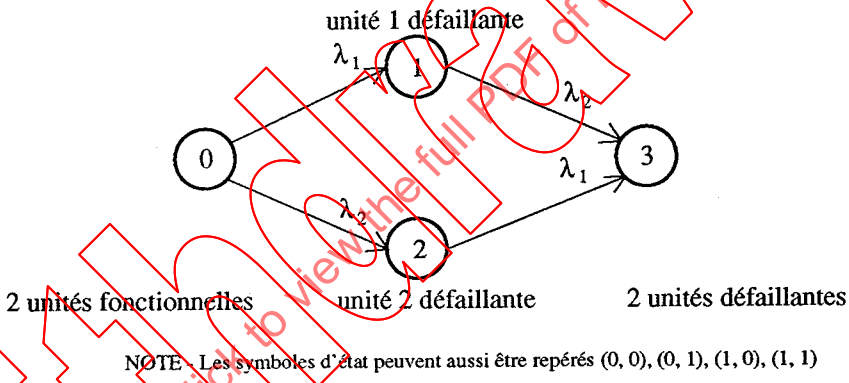


Figure 7 – Graphe de Markov pour l'évaluation de la fiabilité d'un système à une unité

7.3.2 *Système à deux unités*

En général, puisqu'une unité peut être représentée par deux états, "0" (état fonctionnel) et "1" (état de défaillance), les états de système possibles pour un système à deux unités sont les états (0 0), (0 1), (1 0) ,(1 1). Si le système à deux unités est un système série, (0 0) représente le seul état fonctionnel possible et (0 1), (1 0), (1 1) représentent les états de défaillance. Si le système à deux unités contient une redondance active ou passive, les états (0 0), (0 1), (1 0) sont tous des états fonctionnels. Dans ce qui suit, seuls les systèmes comportant deux unités en redondance active sont considérés.

Le graphe de Markov pour un système comportant deux unités (en série ou en parallèle), aucune d'entre elle n'étant apte au rétablissement, est illustré figure 8.



NOTE – Les symboles d'état peuvent aussi être repérés (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)

Figure 8 – Graphe de Markov pour un système composé de deux unités non aptes au rétablissement

Si le système est apte au rétablissement, des flèches sont ajoutées pour représenter le rétablissement avec des taux μ_i (i=1,2) comme illustré à la figure 9.

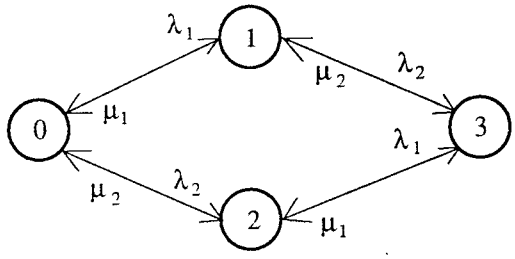


Figure 9 – Graphe de Markov pour un système composé de deux unités aptes au rétablissement

Une défaillance de cause commune peut être introduite en considérant une transition directe de l'état 0 vers l'état 3, λ_3 représentant le taux de défaillance de cause commune (voir figure 10).

The model depicted in figure 3 can be used to obtain the instantaneous availability $A(t)$ and the steady-state (asymptotic) availability $A(\infty)$. If reliability $R(t)$ is required, the state-transition diagram shown in figure 7 is applicable. Note that state 1 becomes an absorbing state.

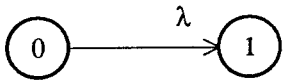
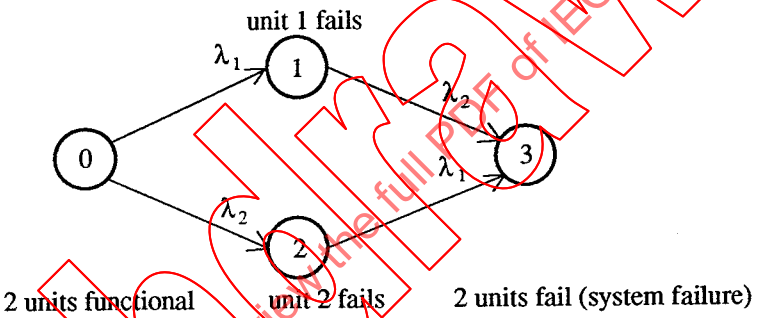


Figure 7 – State-transition diagram for the evaluation of reliability of a one-unit system

7.3.2 *Two-unit system*

In general, since a unit can be represented by two states 0 (functional) and 1 (failed), possible system states for a two-unit system are (0 0), (0 1), (1 0), (1 1). If the two-unit system is a series system, (0 0) is the only functional state and (0 1), (1 0), (1 1) are failed states. If the two-unit system contains active or stand-by redundancy, (0 0), (0 1), (1 0) are all functional states. In what follows, consideration will be given solely to a two-unit active redundant system.

The state-transition diagram for a two-unit (series or parallel) system with no restorable units is illustrated in figure 8.



NOTE – The state symbols may also be marked (0 0), (0 1), (1 0), (1 1).

Figure 8 – State-transition diagram for a two-unit system with no restorable units

If the system is restorable, arrows are added representing restoration with rates μ_i (i=1,2), as illustrated in figure 9.

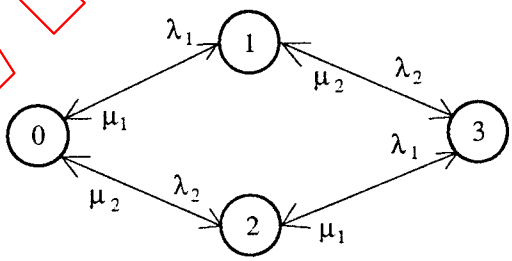


Figure 9 – State-transition diagram for a two-unit system with restorable units

A common-cause failure can be introduced by considering a direct transition from state 0 to state 3, λ_3 representing the common cause failure rate (see figure 10).

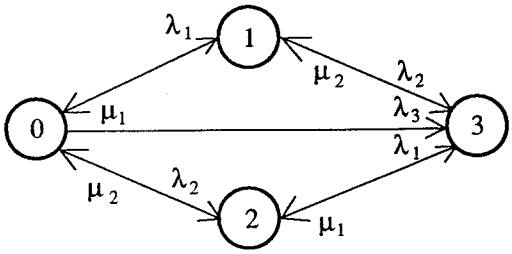


Figure 10 – Graphe de Markov illustrant une défaillance catalectique de cause commune

Si une défaillance de cause commune provoque une panne simultanée de deux unités dans un système apte au rétablissement, il est probable que le temps nécessaire à la remise en état du système après une défaillance de cause commune (retour de l'état 3 à l'état 0) soit différent du temps requis pour remettre le système en état après des défaillances d'unités indépendantes. Par conséquent, lorsque l'état de défaillance est atteint, la nature de l'intervention ultérieure (du type rétablissement) dépend du passé, ce qui contredit l'exigence relative au principe d'absence de mémoire du modèle. Afin de rétablir ce principe, il est nécessaire de modéliser l'intervention de rétablissement du système, conformément à la figure 11.

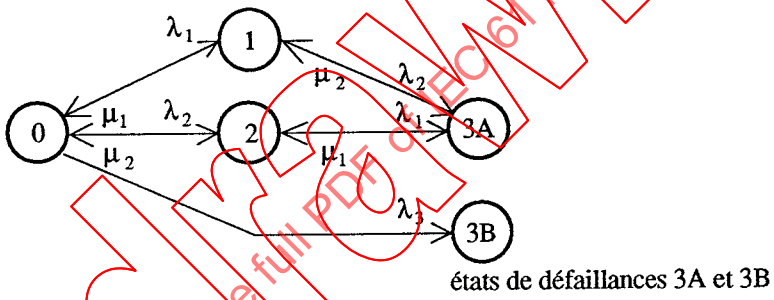


Figure 11 – Graphe de Markov, illustrant une défaillance du système due à une cause commune

A titre d'exemple, considérons un système composé de deux générateurs en redondance passive qui ne démarrent pas dans des conditions de température ambiante basse. Lorsque le système atteint l'état "les deux générateurs ne démarrent pas", le temps de rétablissement dépend de savoir si chaque générateur a été mis hors service par une défaillance mécanique indépendante, ou si les deux générateurs ont été mis hors service par une défaillance de cause commune comme une température ambiante basse. Par conséquent, il est nécessaire de distinguer ces deux cas. Toutefois, pour l'utilisateur du système, il se peut que l'important soit que "les deux générateurs ne démarrent pas" et non de connaître la raison de cette défaillance. Par conséquent, les deux états forment un état combiné pour lequel il faut calculer les mesures de sûreté de fonctionnement en combinant (c'est-à-dire en additionnant les probabilités d'état) les mesures des états constitutifs.

L'analyse de Markov est apte à prendre en compte les stratégies de maintenance. Supposons qu'il n'existe qu'une seule équipe chargée du rétablissement et que la stratégie de maintenance est telle qu'elle consiste à toujours rétablir prioritairement le premier composant défaillant. L'ordre des défaillances doit alors être pris en compte. Ceci est illustré par le graphe de la figure 12.

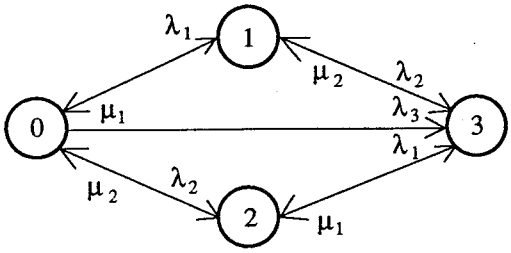


Figure 10 – State-transition diagram illustrating common cause failure

If a common-cause failure disables simultaneously two units in a restorable system, it is likely that the time needed to restore the system after a common cause failure (return from state 3 to state 0) differs from the time needed to restore the system after failures of the individual units. Thus, after reaching the failed state, the course of future action (type of restoration) depends on the past, which violates the requirement for the memoryless property of the model. In order to restore this property, it is necessary that the system restoration action shall be modelled as shown in figure 11.

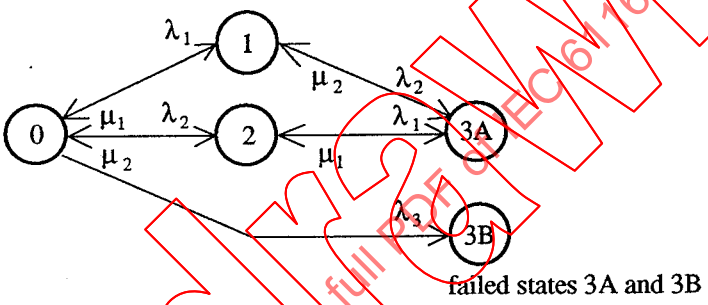


Figure 11 – State-transition diagram with common cause for a system failure

As an example, consider a system with two stand-by generators which does not start at low ambient temperatures. When the system reaches the state "both generators failed to start", the restoration time will depend on whether each generator was disabled by an independent mechanical failure, or both generators were incapacitated by a common cause, such as low ambient temperature. Therefore, it is necessary that the state "both generators failed to start due to independent faults" be considered as separate from the state "both generators failed to start due to a common cause". However, for the user of the system it may only be important that "both generators failed", and not how they failed. Therefore, it is necessary that both states form a combined state for which the dependability measures are obtained by combining (e.g. by adding the state probabilities) the measures of the included states.

State-transition diagrams can take maintenance strategies into account. Assume that only one restoration team exists and that the maintenance strategy is such that repair priority is always given to the component which has failed first. The order of failure occurrences has then to be taken into account. This is illustrated by the state diagram figure 12.

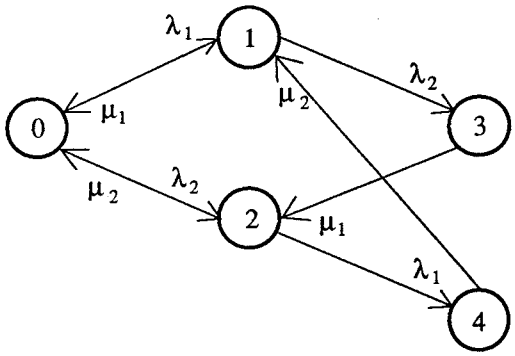


Figure 12 – Graphe de Markov dans le cas d'une équipe unique chargée du rétablissement

Dans la figure 12, les états 3 et 4 ont la signification suivante:

- état 3: les deux composants sont défaillants, le composant 1 étant le premier défaillant;
- état 4: les deux composants sont défaillants, le composant 2 étant le premier défaillant.

8 Calcul des graphes de Markov

8.1 *Généralités*

Le but du calcul des graphes de Markov est de déterminer les mesures de sûreté de fonctionnement du système étudié. Ce calcul utilise des techniques mathématiques bien connues. Il convient de noter que les calculs nécessaires pour obtenir des mesures transitoires, c'est-à-dire $R(t)$ et $A(t)$, sont beaucoup plus importants que ceux qu'il faut accomplir pour obtenir le MTTF, le MDT, le MUT et $A(\infty)$.

La première étape consiste à déterminer la probabilité de trouver le système dans chacun des états individuels. On peut obtenir ces probabilités en résolvant des matrices de transition ou des équations différentielles. Voir l'annexe A.

Les autres mesures de sûreté de fonctionnement peuvent alors être déduites de ces probabilités.

8.2 *Calcul des mesures de fiabilité*

Le graphe de Markov utilisé pour l'évaluation de la fiabilité [$R(t)$] contient au moins un état absorbant. La probabilité pour que le système se trouve à l'instant t dans un état donné est calculée par l'utilisation de techniques mathématiques particulières. Lorsque t tend vers l'infini, la probabilité de chacun des états fonctionnels tend vers 0 et celle de l'état absorbant vers 1.

Une mesure fréquente de la sûreté de fonctionnement est le MTTFF. Lorsque l'on calcule le graphe de Markov, le MTTFF est la moyenne des temps passés par le système dans des états fonctionnels avant d'effectuer une transition vers un état absorbant.

8.3 *Calcul des mesures de disponibilité et de maintenabilité*

Un graphe de Markov utilisé pour l'évaluation de la disponibilité d'un système [$A(t)$ ou $A(\infty)$] ne contient pas d'état absorbant.

La probabilité de trouver le système dans un état donné à l'instant t est déterminée selon les techniques présentées en annexe A. Lorsque t tend vers l'infini, la probabilité associée à chacun des états tend vers une valeur constante. La disponibilité du système tend aussi vers une valeur constante, $A(\infty)$, égale à la somme des probabilités associées aux états fonctionnels.

Deux autres mesures peuvent être aussi calculées:

- la durée moyenne dans un état donné, qui n'est autre que l'inverse de la somme des taux de transition pour quitter cet état;

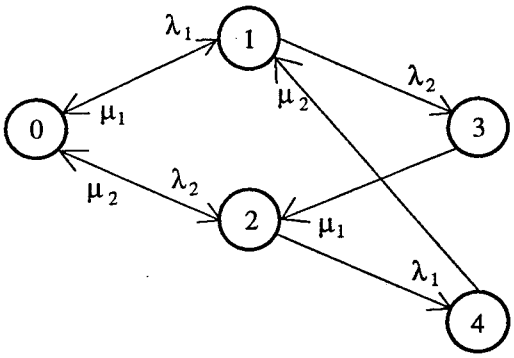


Figure 12 – State-transition diagram with only one restoration team

In figure 12 the states 3 and 4 have the following meanings:

- state 3: the two components have failed, the component number 1 has failed first;
- state 4: the two components have failed, the component number 2 has failed first.

8 Evaluation of state-transition diagrams

8.1 *General*

The purpose of the evaluation of state-transition diagrams is to determine the dependability measures of the system concerned. The evaluation uses well known mathematical techniques. Note that the task of obtaining transient measures, for example $R(t)$ and $A(t)$, requires considerably more calculation than that of obtaining steady-state measures, for example MTTF, MDT, MUT and $A(\infty)$.

The first step consists of determining the probabilities of finding the system in individual states. Probabilities associated with individual states can be obtained by solving transition matrices, or by solving differential equations. See annex A.

Other dependability measures can then be derived from such probabilities.

8.2 *Evaluation of reliability measures*

A state-transition diagram used for the evaluation of reliability [$R(t)$] contains at least one absorbing state. The probability that the system is in a given state at time t is calculated using special mathematical techniques. When t increases to infinity, the probability associated with each functioning state approaches zero, and that of absorbing states approaches unity.

A common dependability measure is MTTFF. When evaluating the state-transition diagram, the MTTFF is the mean of the total of the times spent by the system in functional states before making a transition to an absorbing state.

8.3 *Evaluation of availability and maintainability measures*

A state-transition diagram used for the evaluation of system availability [$A(t)$ or $A(\infty)$] contains no absorbing states.

The probability that the system is in a given state at time t is determined by the techniques given in annex A. As t tends to infinity, the probability associated with each state approaches a constant value. The availability of the system also approaches a constant value, $A(\infty)$, being equal to the sum of the probabilities associated with the functioning states.

Two other useful measures can also be evaluated:

- mean time spent in a state, which is simply the reciprocal of the sum of the transition rates out of that state;

– la fréquence d'entrée dans un état donné, qui est la somme de termes de la forme $P_u\lambda_u + P_v\lambda_v + \ldots$ expression dans laquelle P_u et λ_u sont respectivement la probabilité et le taux de défaillance associés à l'état u, de même pour v et ainsi de suite.

NOTE - Chacun des termes du type $P_u\lambda_u$ représente une transition dans l'état concerné et tous les termes analogues doivent être additionnés pour obtenir la fréquence d'entrée dans cet état. Voir l'exemple dans l'article 9 ci-dessous.

Il est également possible d'obtenir, à partir des probabilités d'état, le temps moyen de disponibilité (MUT) et le temps moyen d'indisponibilité (MDT). Le MUT est en fait le temps moyen passé dans les états fonctionnels et le MDT, le temps moyen passé dans les états de défaillance. Il est également possible de déduire la fréquence d'entrée dans des états de défaillance souvent équivalente au taux de défaillance du système (voir l'exemple de l'article 9 ci-dessous).

9 Simplifications et approximations

Dans la pratique, il se révèle souvent que la durée moyenne de panne (MTTR) d'une unité est très courte en comparaison de la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance (MTTF), c'est-à-dire que l'on a $\mu \gg \lambda$ pour toutes les unités considérées. Dans de telles circonstances, l'utilisation d'un calculateur pour résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires est rarement nécessaire. Une valeur approchée de la probabilité asymptotique $P_i(\infty)$ de trouver le système dans l'état i lorsque t tend vers l'infini peut être obtenue facilement. La méthode d'approximation est basée sur le fait qu'il existe d'une part, une ou plusieurs défaillances conduisant à l'état "x" dont la probabilité est donnée par $P_u(\infty)\lambda_u + P_v(\infty)\lambda_v + \ldots$ où $P_u(\infty)$ et λ_u sont des termes similaires à ceux décrits en 8.3 ci-dessus, et d'autre part qu'il existe des transitions hors de l'état x dont le taux est $\Sigma\mu_x$, dans ces conditions $P_x(\infty)$ est donnée approximativement par

$$P_x(\infty) = \frac{\lambda_u P_u(\infty) + \lambda_v P_v(\infty) + \ldots}{\Sigma\mu_x}$$

expression dans laquelle $P_x(\infty)$, $P_u(\infty)$, et $P_v(\infty)$ sont des probabilités asymptotiques. Si l'on répète cette procédure pour chacun des états, on obtient un système d'équations liant les probabilités de chaque état. Il convient toutefois de remarquer que, si pour certains états, il n'existe pas de transitions de réparation, alors la méthode d'approximation décrite ci-dessus n'est pas valable.

On peut obtenir une valeur approximative pour le MTTFF du système par l'utilisation de la technique décrite ci-dessus en calculant tout d'abord les probabilités d'état fonctionnel et en se servant de celles-ci pour calculer le taux de défaillance du système. Ceci est illustré dans l'exemple qui suit.

Exemple: Considérons le graphe de Markov de la figure 9 et omettons la notation (∞) puisque, sauf spécification contraire, toutes les probabilités d'état sont des probabilités asymptotiques. Les quantités P_1 et P_2 sont données par:

$$P_1 \approx \lambda_1 P_0/\mu_1$$

et

$$P_2 \approx \lambda_2 P_0/\mu_2$$

Ainsi, le taux de défaillance du système λ_S étant la fréquence selon laquelle le système entre dans l'état "système défaillant" (voir ci-dessus), il est donné par:

$$\lambda_S \approx \lambda_2 P_1 + \lambda_1 P_2$$

soit $\lambda_S \approx [\lambda_2\lambda_1/\mu_1 + \lambda_1\lambda_2/\mu_2]P_0$

c'est-à-dire $\lambda_S \approx \lambda_2\lambda_1/\mu_1 + \lambda_1\lambda_2/\mu_2$ puisque lorsque $\mu >> \lambda$, $P_0 \approx 1$

Cette dernière expression est un résultat bien connu, souvent présenté sous la forme:

$$\lambda_S \approx \lambda_1\lambda_2[\tau_1 + \tau_2]$$

où $\tau_1 = 1/\mu_1$ et $\tau_2 = 1/\mu_2$ (τ désignant un temps moyen de rétablissement).

– frequency of entering a state, which is equal to the sum of terms such as $P_u\lambda_u+P_v\lambda_v+\ldots$where P_u and λ_u denote the probability and failure rate respectively associated with state u, similarly for v and so on.

NOTE - Each term of the type $P_u\lambda_u$ represents a transition into the state concerned and all such terms must be summed to obtain the frequency of entering the state. See the example in clause 9 below.

It is also possible to obtain from the state probabilities the MUT (mean up time) and MDT (mean down time) of the system. MUT is in fact the mean time spent in the functioning states and MDT the mean time spent in the failed states. It is also possible to derive the frequency of entering failed states. This is often equivalent to system failure rate. See the example in clause 9 below.

9 Simplifications and approximations

In many practical situations, it turns out that the mean time to restoration, MTTR, of a unit is very short in comparison with its MTTF, that is $\mu \gg \lambda$ for all the units involved. Under such circumstances, the use of a computer to solve sets of linear differential equations is rarely necessary. An approximate value for the asymptotic probability $P_i(\infty)$ of finding the system in the i-th state when t tends to infinity can easily be obtained. The approximation method is based on the fact that if a state "x" has one or more failure transitions into it given by $P_u(\infty)\lambda_u+P_v(\infty)\lambda_v+\ldots$where $P_u(\infty)$ and λ_u and other similar terms are as indicated in 8.3 above, and transitions out of it (state "x") denoted by $\Sigma\mu_x$, then $P_x(\infty)$ is given approximately by

$$P_x(\infty) = \frac{\lambda_u P_u(\infty) + \lambda_v P_v(\infty) + \ldots}{\Sigma\mu_x}$$

where $P_x(\infty)$, $P_u(\infty)$, and $P_v(\infty)$ are steady state probabilities. If this procedure is repeated for each state, a set of equations for the individual state probabilities is generated. It should be noted, however, that if for some states there are no repair transitions, then the approximation method as described will not be valid.

Using the above technique, an approximate value for the system MTTFF can be obtained by first of all calculating the (functional) state probabilities and using these to calculate the failure rate of the system. This is illustrated by the following example.

Example: Consider the state diagram of figure 9 and omit the (∞) notation since, unless otherwise stated, all state probabilities are steady state probabilities. The quantities P_1 and P_2 are given by:

$$P_1 \approx \lambda_1 P_0/\mu_1$$

and

$$P_2 \approx \lambda_2 P_0/\mu_2$$

Thus, the system failure rate λ_S, being the frequency the system enters the "system failed" state (see above), is given by:

$$\lambda_S \approx \lambda_2 P_1+\lambda_1 P_2$$

that is $\lambda_S \approx [\lambda_2\lambda_1/\mu_1+\lambda_1\lambda_2/\mu_2]P_0$

that is $\lambda_S \approx \lambda_2\lambda_1/\mu_1+\lambda_1\lambda_2/\mu_2$ since when $\mu>>\lambda$, $P_0 \approx 1$

This latter expression is a well known result and is often written in the form:

$$\lambda_S \approx \lambda_1\lambda_2[\tau_1+\tau_2]$$

where $\tau_1=1/\mu_1$ and $\tau_2=1/\mu_2$ (τ denotes mean restoration time).

10 Graphes de Markov fusionnés

Pour la facilité de calcul, il convient d'essayer de construire des graphes de Markov utilisant aussi peu que possible d'états. Si l'on suppose que des unités en configuration de redondance parallèle ont le même taux de défaillance, λ, et le même taux de rétablissement, μ, comme l'indique à titre d'exemple la figure 13, et si l'on suppose de plus qu'il y a autant d'opérateurs pour rétablir le système qu'il y a de défaillances, alors le graphe de Markov peut être représenté sous une forme fusionnée telle qu'illustrée en figure 14.

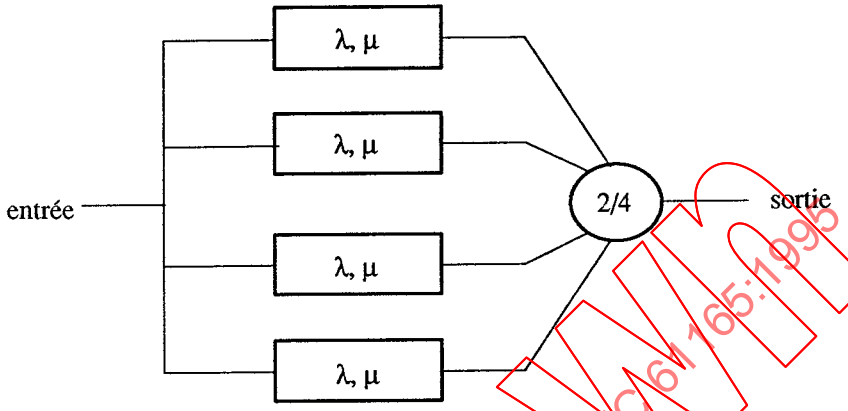
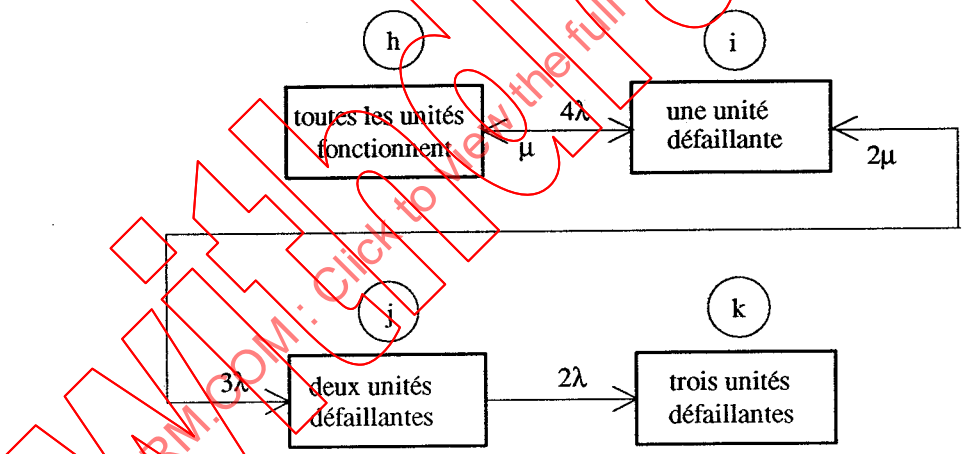


Figure 13 – Diagramme de fiabilité pour un système parallèle «2 parmi 4»



états fonctionnels: h, i, j
état défaillant: k

Figure 14 – Graphes de Markov fusionnés pour le système figure 13

Un système d'équations différentielles linéaires peut être déduit du diagramme ci-dessus (voir annexe A) pour obtenir l'expression suivante de la durée moyenne de bon fonctionnement (MTTFF):

$$MTTFF = \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{\mu}{3\lambda}\cdot\frac{2\mu}{2\lambda}+\frac{\mu}{3\lambda}+1\right)$$
$$+\frac{1}{3\lambda}\left(\frac{2\mu}{2\lambda}+1\right)$$
$$+\frac{1}{2\lambda}$$

10 Collapsed state-transition diagram

For ease of computation, attempts should be made to construct state-transition diagrams using as few a number of states as possible. If units in a parallel redundant configuration can be assumed to all have the same failure rate, λ, and all have the same restoration rate, μ, as indicated, for example, by figure 13, and if it is further assumed that there are as many repairmen as failures, then the state-transition diagram can be expressed in a collapsed form illustrated by figure 14.

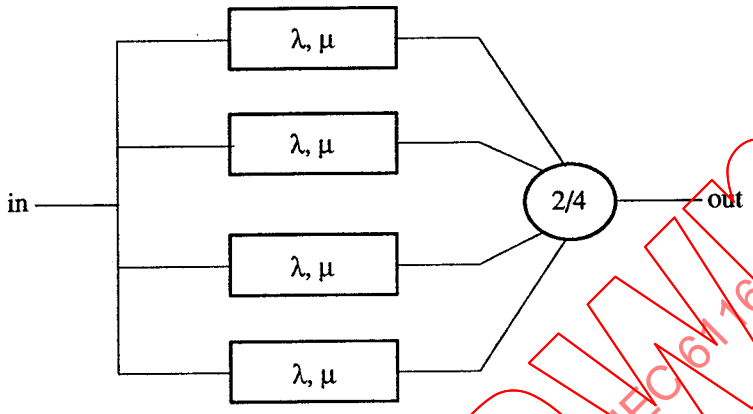


Figure 13 – Reliability block diagram for a 2-out-of-4 parallel system

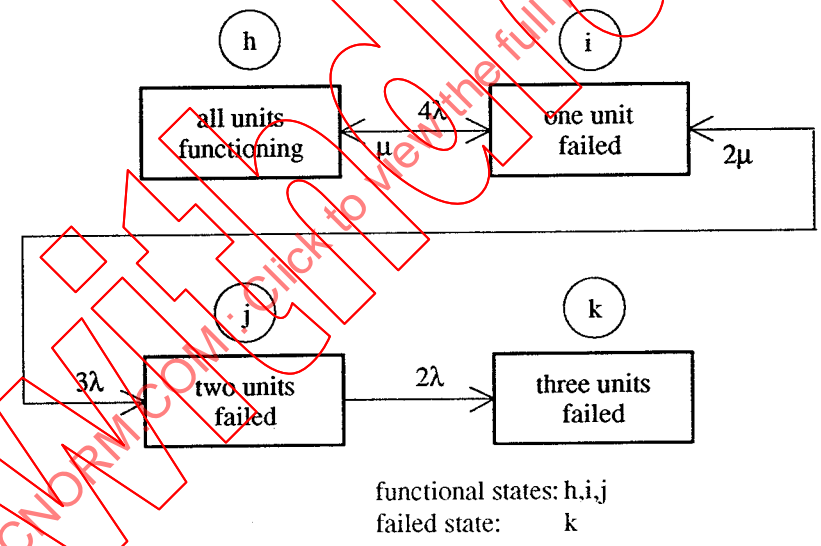


Figure 14 – Collapsed state-transition diagram for the system in figure 13

From the above diagram, a set of linear differential equations can be obtained and solved (see annex A) to give the following expression for the system mean time to first failure (MTTFF):

$$MTTFF = \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{\mu}{3\lambda}\cdot\frac{2\mu}{2\lambda}+\frac{\mu}{3\lambda}+1\right) + \frac{1}{3\lambda}\left(\frac{2\mu}{2\lambda}+1\right) + \frac{1}{2\lambda}$$

Une expression exacte du MTTFF du système peut être ainsi obtenue. L'expression se présente comme une structure simple qui peut être utilisée pour obtenir une formule qui s'applique aux chaînes fusionnées de n'importe quelle longueur. Par exemple, dans la configuration de la figure 15, on peut démontrer que:

$$\mathrm{MTTFF} = \frac{1}{\lambda_h}\left(\frac{\mu_i\mu_j\mu_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k} + \frac{\mu_i\mu_j}{\lambda_i\lambda_j} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\mu_j\mu_k}{\lambda_j\lambda_k} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_j}\cdot\left(\frac{\mu_k}{\lambda_k} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_k}$$

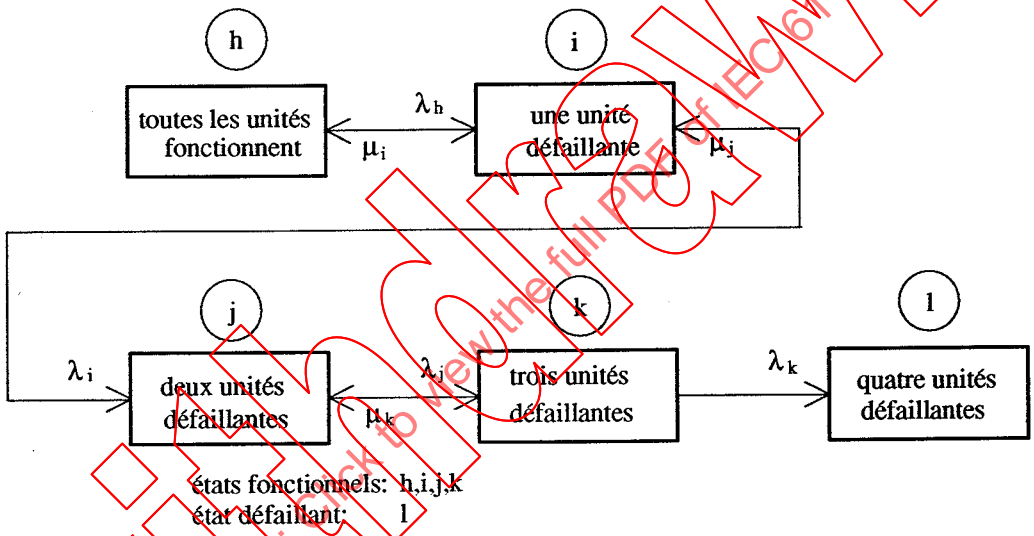


Figure 15 – Graphe de Markov fusionné pour un système parallèle (quatre unités)

11 Expression de la fiabilité et de la disponibilité

L'annexe B comprend deux tableaux, le premier d'entre eux présentant les formules pour les mesures de la sûreté de fonctionnement de systèmes non aptes au rétablissement alors que le second concerne uniquement les systèmes aptes au rétablissement.

Plus ample information peut être trouvée dans la littérature spécialisée.

12 Présentation des résultats

Il convient que l'analyse soit présentée en incluant, au moins, les éléments suivants:

a) la spécification des mesures de sûreté de fonctionnement souhaitées (par exemple fiabilité, disponibilité, maintenabilité, MTTF);

b) les principales hypothèses faites (par exemple celle des taux de défaillance et de rétablissement constants);

An exact expression for system MTTFF can thus be derived. The expression shows a distinct pattern which can be used to obtain a formula for collapsed chains of any length. As an example, for the configuration in figure 15 it is possible to show that:

$$\mathrm{MTTFF} = \frac{1}{\lambda_h}\left(\frac{\mu_i\mu_j\mu_k}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k} + \frac{\mu_i\mu_j}{\lambda_i\lambda_j} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\mu_j\mu_k}{\lambda_j\lambda_k} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_j}\cdot\left(\frac{\mu_k}{\lambda_k} + 1\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_k}$$

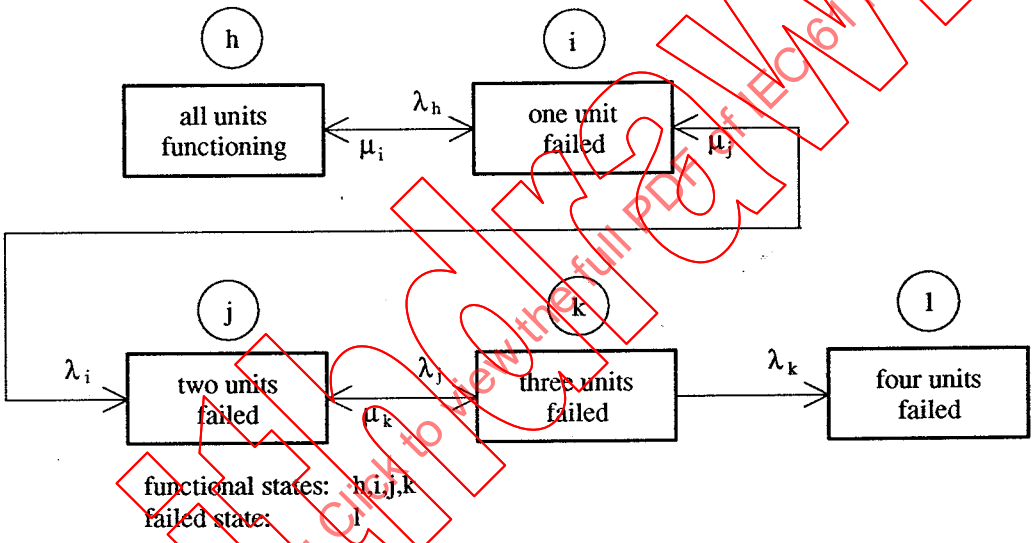


Figure 15 – Collapsed state-transition diagram for a parallel system (four units)

11 Reliability and availability expressions for system configurations

Annex B contains two sets of tables, the first of which contains formulae for the dependability measures of non-restorable systems, while the second is concerned solely with restorable systems.

Further information can be found in standard textbooks.

12 Presentation of results

The presentation of the analysis should incorporate at least the following elements:

a) specification of the desired dependability measures (for example reliability, availability, maintainability, MTTF);

b) the main assumptions used (for instance, constant failure and restoration rates);

c) la définition de la méthode choisie, y compris la justification;

d) la description du graphe de Markov, y compris l'examen approfondi des aspects suivants:
- description séparée des états fonctionnels et défaillants;
- lorsque cela s'applique, les raisons pour lesquelles certains états sont regroupés et d'autres omis;
- la description séparée des transitions entre états;
- le choix des valeurs numériques pour les taux de transition;
- la façon de construire le graphe, incluant toutes les hypothèses.

e) la description du calcul
- méthodes;
- programme informatique utilisé, si tel est le cas;

f) les résultats numériques
- les résultats sous forme numérique ou autre;
- influence des hypothèses faites pour construire le graphe de Markov ou pour les calculs;
- l'analyse de sensibilité.

c) definition of method chosen, including justification;

d) description of the state-transition diagram including in-depth examination of the following aspects:

- the functioning and failed states described separately;
- where applicable, the reasons why some states are grouped and others are omitted;
- transitions between states described separately;
- the choice of numerical values for the transition rates;
- the way the graph is built including any assumptions;

e) description of the computation:

- methods;
- computer programs, if used;

f) numerical results:

- results in numerical and other forms;
- influence of the assumptions used for constructing the state-transition diagram or for calculations;
- sensitivity analysis.

Annexe A
(informative)

Exemple: Calcul numérique de certaines mesures de sûreté de fonctionnement d'un système composé de deux unités en redondance active

A.1 Objectif

Dans cette annexe, on considère un système composé de deux unités en parallèle. Les mesures à évaluer sont celles de la disponibilité asymptotique, de la disponibilité instantanée, de la fiabilité et du MTTFF. Les méthodes mathématiques que l'on applique habituellement dans ce domaine sont utilisées.

A.2 Modélisation

Le graphe de Markov d'un système composé de deux unités en parallèle (redondance active) est présenté à la figure A.1 pour l'évaluation de la disponibilité. L'état 3 est l'état de défaillance.

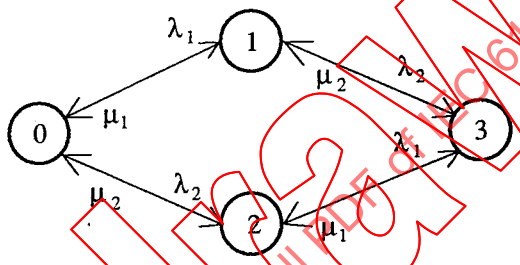


Figure A.1 – Graphe de Markov d'un système composé de deux unités

Remarquer que le graphe de Markov pour l'évaluation de la fiabilité $R(t)$ est obtenu en éliminant les transitions de rétablissement de l'état 3 vers les états 1 et 2. Dans ces conditions, l'état 3 devient un état absorbant.

Supposons que les deux unités du système sont identiques ou bien ont les mêmes taux de défaillance/ rétablissement. Le graphe réduit se présente alors selon la figure A.2.

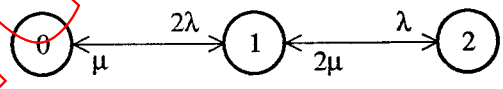


Figure A.2 – Graphe de Markov d'un système composé de deux unités identiques

Remarquer que le graphe de Markov pour l'évaluation de la fiabilité $R(t)$ est obtenu en éliminant les transitions de rétablissement de l'état 2 vers l'état 1. Dans ces conditions, l'état 2 devient un état absorbant.

A.3 Méthode par résolution d'équations différentielles

A.3.1 *Méthode pour déterminer la disponibilité*

Soit $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ les probabilités du système d'être dans les états 0, 1 et 2, respectivement, à l'instant t (figure A.2). On obtient ainsi les équations différentielles suivantes à partir du graphe de Markov de la figure A.2:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) + 2\mu P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t)$$

Annex A
(informative)

Example: Numerical evaluation of some dependability measures of a two-unit active redundant system

A.1 Objective

In this annex a system of two units in parallel is considered. The measures to be assessed are asymptotic availability, instantaneous availability, reliability and MTTFF. Conventional mathematical methods commonly used in this field, are applied.

A.2 Modelling

The state-transition diagram of a system of two parallel units (active redundancy) is given in figure A.1 for the assessment of the availability. State 3 is the failed state.

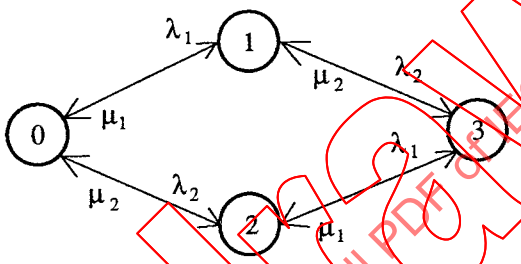


Figure A.1 – State-transition diagram for a two-unit system

Note that the state-transition diagram to assess reliability, $R(t)$, is obtained by eliminating the restoration transitions from state 3 to states 1 and 2. State 3 thus becomes an absorbing state.

Assume that the two units in the system are identical, or have the same failure/restoration rates. The reduced diagram then becomes as figure A2.

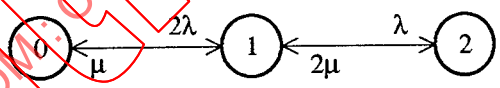


Figure A.2 – State-transition diagram of a system with two identical units

Note also that the state-transition diagram to assess reliability, $R(t)$, is obtained by eliminating the restoration transition from state 2 to state 1. State 2 thus becomes an absorbing state.

A.3 Differential equation method

A.3.1 *Method for availability*

Let $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ be the probabilities of the system being in states 0, 1 and 2 respectively at time 't' (figure A.2). The following differential equations are thus obtained from the state diagram of figure A.2:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) + 2\mu P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t)$$

Les probabilités $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ peuvent être calculées en résolvant ce système d'équations différentielles en supposant que, à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état 0, c'est-à-dire que:

$$P_0(0) = 1$$

$$P_1(0) = 0$$

$$P_2(0) = 0$$

La disponibilité instantanée, A (t) est alors calculée selon:

$$A(t) = P_0(t) + P_1(t)$$

Une expression explicite en fonction de λ et μ peut être calculée en utilisant, par exemple, les transformées de Laplace. Elle est donnée par:

$$A(t) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^2 e^{-(\lambda+\mu)t}\left[2 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$

La disponibilité asymptotique $A(\infty)$, découle immédiatement de l'expression ci-dessus. Alternativement, elle peut être calculée en remarquant que, à l'instant $t = \infty$, les équations suivantes s'appliquent:

$$0 = -2\lambda P_0(\infty) + \mu P_1(\infty)$$

$$0 = 2\lambda P_0(\infty) - (\lambda+\mu) P_1(\infty) + 2\mu P_2(\infty)$$

$$0 = \lambda P_1(\infty) - 2\mu P_2(\infty)$$

Dans ce système d'équations, chacune d'entre elles peut être déduite des deux autres, de telle sorte qu'il n'y a vraiment que deux équations utiles pour trois inconnues. Pour dépasser cette difficulté, on utilise le fait que $P_0(\infty) + P_1(\infty) + P_2(\infty) = 1$ et on utilise cette relation comme troisième équation. Il s'en suit, après quelques transformations mathématiques que:

$$A(\infty) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

A.3.2 *Méthode pour déterminer la fiabilité*

Afin d'évaluer la fiabilité et le MTTFF d'un tel système, on obtient les équations différentielles suivantes à partir du graphe de Markov de la figure A.2, en gardant à l'esprit que l'état 2 doit être considéré comme absorbant (la transition de rétablissement de l'état 2 vers l'état 1 n'existe plus):

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) \qquad \text{Système d'équations A}$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t)$$

Les probabilités $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ peuvent être calculées en résolvant ce système d'équations différentielles, en supposant que, à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état 0:

$P_0(0) = 1$

$P_1(0) = 0$

$P_2(0) = 0$

By solving this differential equation system, the probabilities $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ can be computed assuming, for instance, that at time t = 0, the system is in state 0, that is:

$$P_0(0) = 1$$
$$P_1(0) = 0$$
$$P_2(0) = 0$$

The instantaneous availability, $A(t)$, is then computed as:

$$A(t) = P_0(t) + P_1(t)$$

An explicit expression in λ and μ can be calculated, for example, by the use of Laplace transforms and is given by:

$$A(t) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^2 e^{-(\lambda+\mu)t}\left[2 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$

From the above expression, the asymptotic availability, $A(\infty)$, follows immediately. Alternatively, it can be calculated by noting that, at time t = ∞, the following equations are valid:

$$0 = -2\lambda P_0(\infty) + \mu P_1(\infty)$$
$$0 = 2\lambda P_0(\infty) - (\lambda+\mu) P_1(\infty) + 2\mu P_2(\infty)$$
$$0 = \lambda P_1(\infty) - 2\mu P_2(\infty)$$

Now in this set of equations, any one can be obtained from the other two, so that there are really only two useful equations in three unknowns. To overcome this difficulty, use is made of the fact that $P_0(\infty) + P_1(\infty) + P_2(\infty) = 1$ and this is used as the third equation. Hence, after some mathematical manipulation, it can be shown that

$$A(\infty) = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

A.3.2 Method for reliability

To assess the reliability and the MTTFF of such a system the following differential equations are obtained from the state diagram in figure A.2 bearing in mind that state 2 must be considered as an absorbing state (the restoration transition from state 2 to state 1 is removed):

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$
$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) \qquad \text{Equation set A}$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t)$$

By solving this differential equation system, the probabilities $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$ can be computed assuming, for instance, that at time $t = 0$, the system is in state 0:

$$P_0(0) = 1$$
$$P_1(0) = 0$$
$$P_2(0) = 0$$

On peut alors calculer la fiabilité du système par:

$$R_S(t) = P_0(t) + P_1(t)$$

Une expression, explicite en fonction de λ et de μ peut être calculée en utilisant les transformées de Laplace. Elle est donnée par:

$$R_S(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2}$$

où

$$s_1 s_2 = 2\lambda^2$$

$$s_1 + s_2 = -(\mu + 3\lambda)$$

Le MTTFF peut être calculé soit à partir de l'expression de $R_S(t)$, auquel cas

$$\text{MTTFF} = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{\mu + 3\lambda}{2\lambda^2}$$

ou bien à partir du système d'équations obtenu en intégrant de 0 à ∞ les équations A ci-dessus. Les détails de ces méthodes se trouvent dans la littérature spécialisée.